Løsningsforslag til eksamen i Matematikk R1 V2013

Del 1

Oppgave 1

$$A'(r) = \pi \cdot 2r = \underline{\underline{2\pi r}}$$
$$V'(r) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 = \underline{\underline{4\pi r^2}}$$

Oppgave 2

a) Vi bruker kjerneregelen med $x^2 - 1$ som kjerne.

$$g'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x^2 - 1} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{3 \cdot 2x}{x^2 - 1} = \underline{\underline{\frac{6x}{x^2 - 1}}}$$

b) Vi bruker brøkregelen.

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x^2)' \cdot \mathrm{e}^x - 2x^2 \cdot (\mathrm{e}^x)'}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{4x\mathrm{e}^x - 2x^2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} \\ &= \frac{(4x - 2x^2)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2} = \underline{\underline{\frac{4x - 2x^2}{\mathrm{e}^x}}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

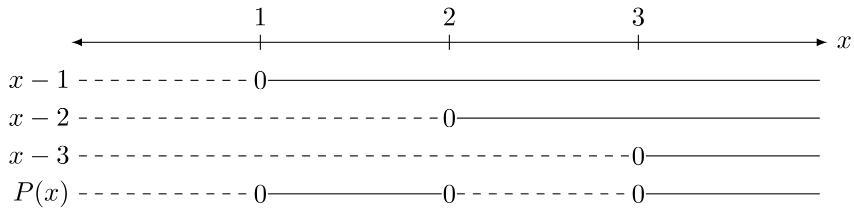
a) $P(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 11(1) - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = \underline{\underline{0}}$

b) Siden $P(1) = 0$ vil $P(x)$ ha $(x - 1)$ som faktor.

$$\begin{array}{l} (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x - 1) = x^2 - 5x + 6 \\ \underline{\;x^3 - x^2\;} \\ - 5x^2 + 11x - 6 \\ \underline{- 5x^2 + 5x} \\ 6x - 6 \\ \underline{6x - 6} \\ 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x^2-2x-3x+(-2)(-3)) = \underline{\underline{(x-1)(x-2)(x-3)}}$$

c) Vi tegner fortegnslinje, og ser at $P(x) \leq 0$ når $\underline{\underline{x \leq 1 \text{ eller } 2 \leq x \leq 3}}$.



Oppgave 4

$$\begin{aligned}\ln(a^2 \cdot b) - 2\ln a - \ln\left(\frac{1}{b}\right) &= (\ln a^2 + \ln b) - 2\ln a - (\ln 1 - \ln b) \\ &= 2\ln a + \ln b - 2\ln a - 0 + \ln b = \underline{\underline{2\ln b}}\end{aligned}$$

Oppgave 5

Vi ser at f er sammenhengende, så f er kontinuerlig for $\underline{\underline{x \in \langle -1, 4\rangle}}$.

Vi ser at f har en plutselig endring i momentan vekstfart ved $x = 2$, så funksjonen er ikke deriverbar der. f er dermed deriverbar når $\underline{\underline{x \in \langle -1, 2\rangle \cup \langle 2, 4\rangle}}$.

Oppgave 6

Vi finner den andrederiverte til f.

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3x^2 + 12x \\ f''(x) &= 6x + 12\end{aligned}$$

Siden den andrederiverte er lineær vil den skifte fortegn i nullpunktet, som vi enkelt ser ligger ved $x = -2$. Dermed vil f ha et vendepunkt her.

$$\begin{aligned}f(-2) &= (-2)^3 + 6(-2)^2 - 2 = -8 + 24 - 2 = 14 \\ f'(-2) &= 3(-2)^2 + 12(-2) = 12 - 24 = -12\end{aligned}$$

Vendetangenten har altså stigningstall -12 og går gjennom punktet $(-2, 14)$. Ettpunktsformelen gir oss at likningen blir

$$\begin{aligned}y - 14 &= -12(x - (-2)) \\ y &= -12x - 24 + 14 \\ y &= \underline{\underline{-12x - 10}}\end{aligned}$$

Oppgave 7

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = [2, 3] \cdot [-6, 4] = (2)(-6) + (3)(4) = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

b) $\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b} \Rightarrow [3, 11] = k[2, 3] + t[-6, 4] \Rightarrow [3, 11] = [2k - 6t, 3k + 4t]$.

Dette gir oss likningssettet $2k - 6t = 3 \wedge 3k + 4t = 11$.

Vi omformer den første likningen til $k = 3t + \dfrac{3}{2}$, og setter inn i den andre.

$$\begin{aligned}
3\left(3t + \frac{3}{2}\right) + 4t &= 11 \\
9t + \frac{9}{2} + 4t &= 11 \\
18t + 9 + 8t &= 22 \\
26t &= 13 \\
t &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \Rightarrow k = 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \underline{\underline{3}}
\end{aligned}$$

Oppgave 8

a) Konstruksjonsforklaring:

1. Markerer punktet O, og slår en sirkel med radius på 5,0 cm.
2. Tegner inn en diameter på sirkelen, og lar endepunktene være A og B.
3. Konstruerer en normal på AB i O. Normalen skjærer sirkelen i C.
4. Trekker linjene AC og BC, og konstruerer midtpunktet D på AC.
5. Setter passerspissen i D og enden i A og trekker halvsirkelen med AC som diameter.

Se vedlegg 1 for konstruksjonen.

b) Vi bruker Pytagoras' læresetning på ΔAOC.

$$\begin{aligned}
AC^2 &= AO^2 + OC^2 \\
AC^2 &= r^2 + r^2 = 2r^2 \\
AC &= \sqrt{2r^2} = \underline{\underline{r \cdot \sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

Arealet til halvsirkelen med AC som diameter blir

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}AC\right)^2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2} \cdot r \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot r^2 \cdot 2 = \frac{1}{4}\pi r^2$$

Vi regner ut arealet av halvsirkelen med AB som diameter og trekker fra arealet av ΔABC.

$$\frac{\pi r^2}{2} - \frac{2r \cdot r}{2} = \frac{\pi r^2}{2} - r^2$$

Området som er markert i blått vil ha et areal som er gitt ved arealet til halvsirkelen med AC som diameter minus halvparten av arealet overfor.

Vi får

$$\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi r^2}{2} - r^2\right) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{1}{2}r^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}r^2}},$$

som er det samme som arealet til ΔAOC, siden grunnlinje og høyde i denne trekanten begge er lik r.

Del 2

Oppgave 1

a) Generelt har vi at hvis et polynom har $x = a$ som nullpunkt så vil $(x - a)$ være en faktor i polynomet. Dermed fører det at f har nullpunktene $x = -1$, $x = 1$ og $x = 3$ til at funksjonen vil være delelig med de oppgitte faktorene.

En eventuell fjerde faktor i f vil være en konstant a, siden en tredjegradsfunksjon kun inneholder tre førstegradsfaktorer. Dermed er $f(x) = a(x+1)(x-1)(x-3) = \underline{\underline{a(x^2-1)(x-3)}}$.

At $(0, 12)$ ligger på grafen til f betyr at

$$f(0) = 12 \Rightarrow a(0^2 - 1)(0 - 3) = a(-1)(-3) = 3a = 12 \Rightarrow \underline{\underline{a = 4}}$$

b) Vi regner ut $f'(0)$ for å finne stigningstallet til tangenten. Vi multipliserer først ut $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(x^2-1)(x-3) = 4(x^3 - 3x^2 - x + 3) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 \\ f'(x) &= 12x^2 - 24x - 4 \\ f'(0) &= 12(0)^2 - 24(0) - 4 = -4 \end{aligned}$$

Siden tangenten åpenbart skjærer y-aksen i 12 vil likningen bli $\underline{\underline{y = -4x + 12}}$.

c) x-koordinaten til skjæringspunktet vil være en løsning på likningen

$$f(x) = -4x + 12 \Rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \Rightarrow 4x^2(x-3) = 0$$

Vi ser at i tillegg til den allerede kjente løsningen $x = 0$ vil $x = 3$ være en løsning. Vi vet fra før at dette er et nullpunkt for f, så koordinatene til punktet er $\underline{\underline{(3, 0)}}$.

Oppgave 2

a) Siden M_1 er midtpunktet på AB så gir midtpunktformelen oss at

$$M_1 = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{1+2}{2}\right) = \underline{\underline{\left(3, \frac{3}{2}\right)}}$$

På samme måte blir

$$M_2 = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{2+4}{2}\right) = \underline{\underline{(4,3)}} \quad \text{og}$$

$$M_3 = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \underline{\underline{\left(2, \frac{5}{2}\right)}}$$

b) Vi regner ut retningsvektorer til linjene

$$\overrightarrow{AM_2} = [4-1, 3-1] = [3,2]$$

$$\overrightarrow{CM_1} = \left[3-3, 4-\frac{3}{2}\right] = \left[0, \frac{5}{2}\right]$$

Siden $\overrightarrow{CM_1}$ er parallell med y-aksen bruker vi $[0,1]$ som retningsvektor.

Dermed får linja gjennom A med retningsvektoren $[3,2]$ parameterframstillingen

$$\underline{\underline{x = 1+3t \wedge y = 1+2t}}$$

og linja gjennom C med retningsvektoren $[0,1]$ får parameterframstillingen

$$\underline{\underline{x = 3 \wedge y = 4+t}}$$

c) Vi løser oppgaven i Geogebra ved å legge inn punktene A, B og C og bruke verktøyet *Mangekant* til å tegne ΔABC. Deretter bruker vi verktøyet *Midtpunkt* til å markere M_1, M_2 og M_3, og *Linjestykke mellom to punkt* for å tegne inn medianene. Verktøyet *Skjæring mellom to objekt* gir oss at T har koordinatene $\underline{\underline{\left(3, \frac{7}{3}\right)}}$.

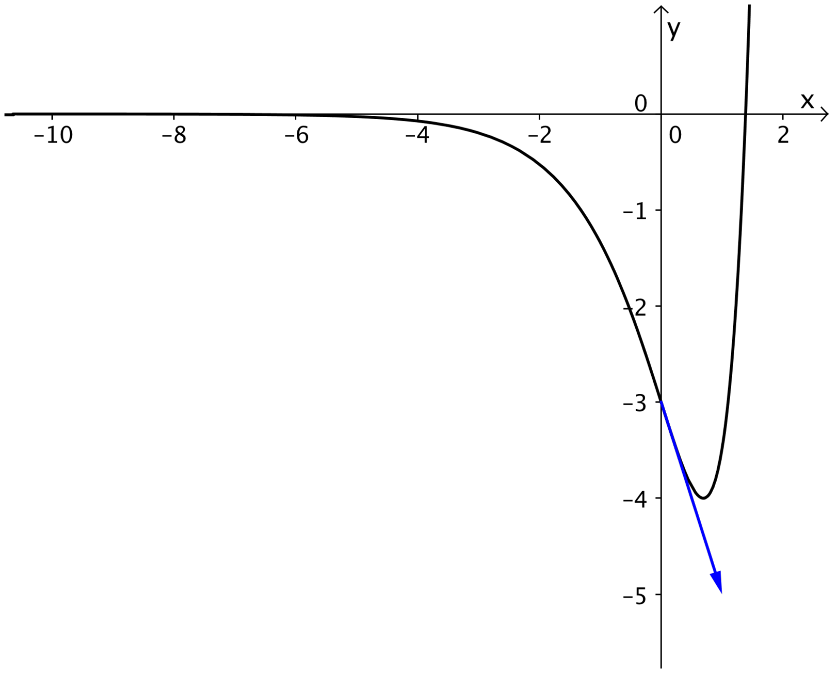
Se vedlegg 2 for konstruksjonsforklaring.

Oppgave 3

a) Tegnet grafen i Geogebra med kommandoen `r=Kurve[ln(t),t^2-4t,t,0,100]`.

Grafen skjærer y-aksen når $x = \ln t = 0 \Rightarrow t = \mathrm{e}^0 = 1 \Rightarrow y = (1)^2 - 4(1) = -3$ og x-aksen når $y = t(t-4) = 0 \Rightarrow t = 4$ (siden $t > 0$) $\Rightarrow x = \ln 4$.

Vi har altså skjæringspunkter i $(\ln 4, 0)$ og $(0, -3)$.



b) $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left[\dfrac{1}{t}, 2t - 4\right]$. Vi har topp- og bunnpunkter i punkter der fartsvektoren er parallell med x-aksen, altså der $y = 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2$. Siden $\vec{v}(1) = [1, -2]$ vil fartsvektoren før dette peke nedover, altså har vi et bunnpunkt når $t = 2$.

Koordinatene til punktet blir $(\ln 2, (2)^2 - 4(2)) = \underline{\underline{(\ln 2, -4)}}$.

Vektoren er tegnet inn ved kommandoen `Vektor[r(1),r(1)+(1,-2)]` i Geogebra.

c) Vi kan skrive fartsvektoren som $\vec{v}(t) = [t^{-1}, 2t - 4]$. Vi får

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = [-t^{-2}, 2] = \left[-\frac{1}{t^2}, 2\right]$$

Siden $-\dfrac{1}{t^2}$ blir mindre og mindre jo større t er vil $\vec{a}(t) \to [0, 2]$ når $t \to \infty$.

Vi kommer altså nærmere og nærmere en konstant akselerasjon i positiv y-retning.

Oppgave 4

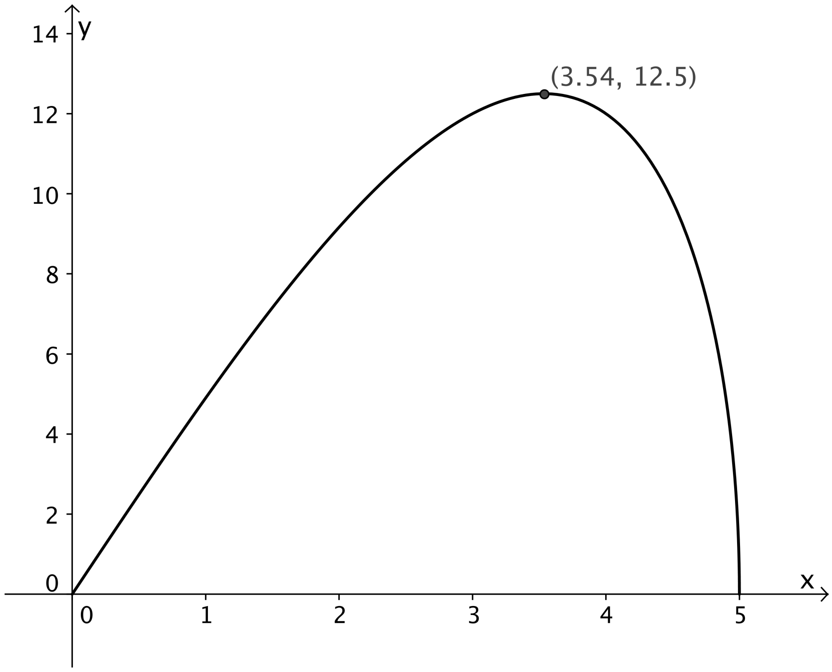
a) Pytagoras' læresetning gir oss $y = \sqrt{5^2 - x^2} = \sqrt{25 - x^2}$. Arealet til rektangelet blir da

$$T(x) = xy = \underline{\underline{x \cdot \sqrt{25 - x^2}}}$$

x og y må begge være større enn null. Dermed får vi

$$x > 0 \wedge y = \sqrt{25 - x^2} > 0 \Rightarrow x > 0 \wedge 25 > x^2 \Rightarrow \underline{\underline{0 < x < 5}}$$

b) Vi tegner grafen til T i Geogebra med kommandoen `T(x)=Funksjon[x sqrt(25-x^2),0,5]`.



Kommandoen `Ekstremalpunkt[T,0,5]` gir oss toppunktet $(3{,}54, 12{,}5)$, altså har vi det største arealet når $\underline{\underline{x = 3{,}54}}$. y er da $\sqrt{25-(3{,}54)^2} = \underline{\underline{3{,}53}}$. Vi ser at vi har det største arealet når firkanten er et kvadrat (x og y er ikke helt like, men dette skyldes avrundinger).

c) Omkretsen er $O(x) = 2y + 2x = 2 \cdot \sqrt{25-x^2} + 2x$. Vi deriverer denne.

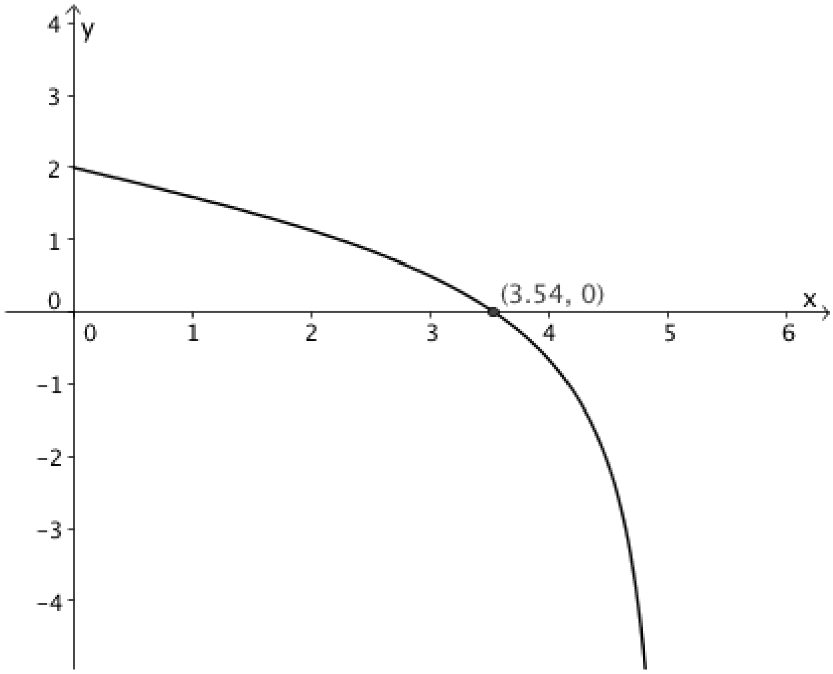
$$\begin{aligned} O'(x) &= 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{25-x^2}} \cdot (25-x^2)' + 2 \\ &= \frac{2(-2x)}{2 \cdot \sqrt{25-x^2}} + 2 \\ &= 2 - \frac{2x}{\sqrt{25-x^2}} \end{aligned}$$

Vi tegner grafen til den deriverte i Geogebra med kommandoen

`O'(x)=Funksjon[2-(2x)/sqrt(25-x^2),0,5]`

og finner nullpunktet ved kommandoen `Nullpunkt[O',3,4]`.

Vi ser at den deriverte endrer fortegn fra positivt til negativt i $x = 3{,}54$, altså har omkretsfunksjonen sin største verdi for denne x-verdien. Siden dette er samme svar som i oppgave b er det et kvadrat som gir den største omkretsen.



Oppgave 5

a) Vi innfører disse hendingene.

R_i: Vi trekker en rød kule på den i-nde trekningen.
S_i: Vi trekker en svart kule på den i-nde trekningen.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(R_1 \cap S_2) + P(S_1 \cap R_2) \\ &= P(R_1) \cdot P(S_2 \mid R_1) + P(S_1) \cdot P(R_2 \mid S_1) \\ &= \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \underline{\underline{\frac{8}{15}}} \end{aligned}$$

b) A og B er komplementære hendinger, så $P(B) = 1 - P(A) = \underline{\underline{\frac{7}{15}}}$.

c) Vi lar antall svarte kuler være x. Da er det totale antallet kuler $x + 6$. Hvis hendelsene A og B skal ha lik sannsynlighet må $P(B) = 50\%$, siden A og B er komplementære.

$$\begin{aligned} P(B) &= 0{,}5 \\ P(R_1) \cdot P(R_2 \mid R_1) + P(S_1) \cdot P(S_2 \mid S_1) &= 0{,}5 \\ \frac{6}{x+6} \cdot \frac{5}{x+5} + \frac{x}{x+6} \cdot \frac{x-1}{x+5} &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Vi bruker CAS-verktøyet i Geogebra, skriver inn

```
6/(x+6)*5/(x+5)+x/(x+6)*(x-1)/(x+5)=0.5
```

og trykker på *Løs*. Vi får løsningene $x = 3$ og $x = 10$.

$\underline{\underline{\text{Vi kan ha enten 3 eller 10 svarte kuler i esken.}}}$

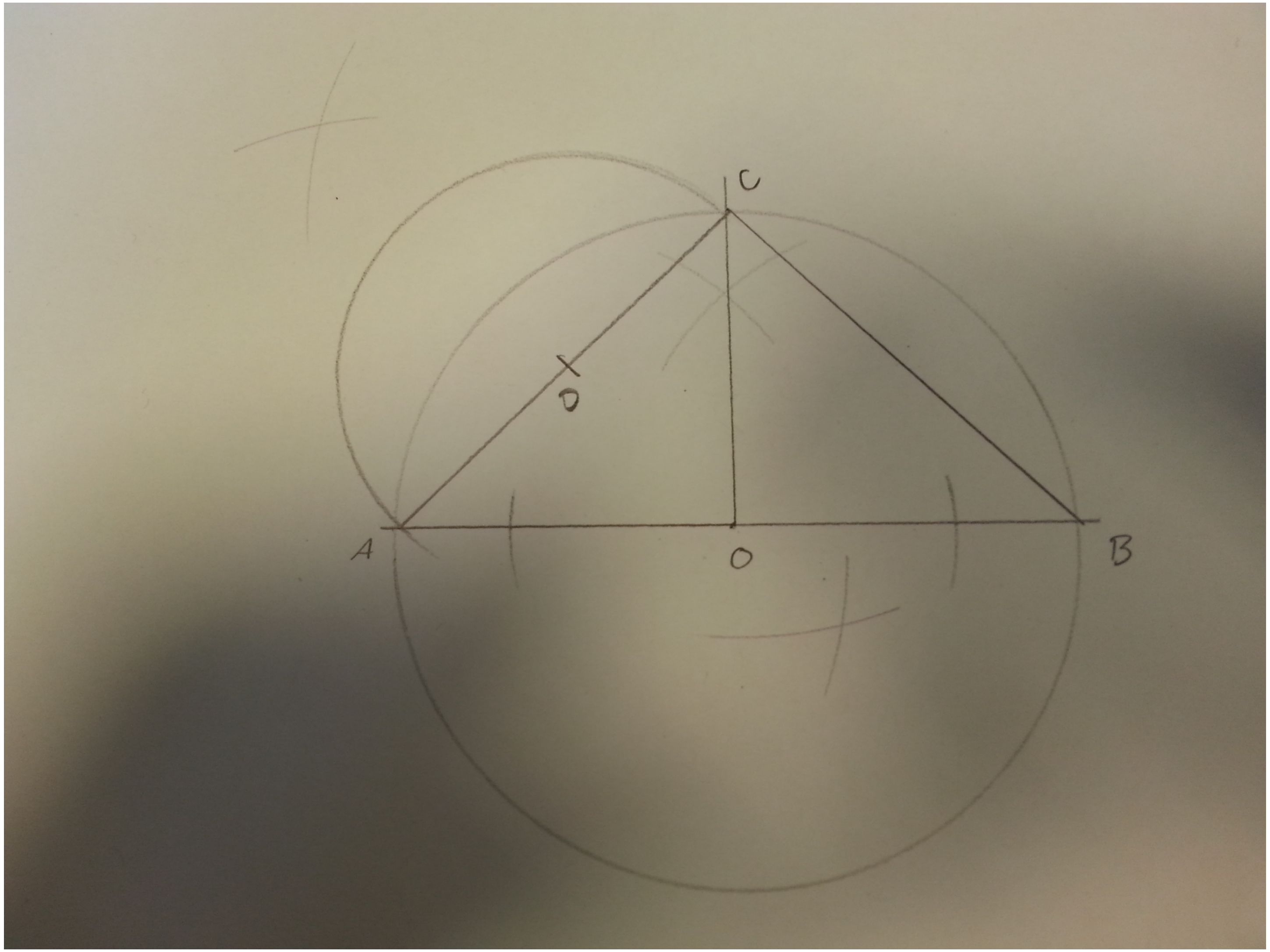
Oppgave 6

$$n^2 \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = x^2 \Rightarrow \left(\frac{x}{n}\right)^{\lg x} = \left(\frac{x}{n}\right)^2$$

Vi ser at de to potensene har samme grunntall, så de blir like hvis eksponentene er like, altså hvis $\lg x = 2 \Rightarrow \underline{\underline{x = 100}}$.

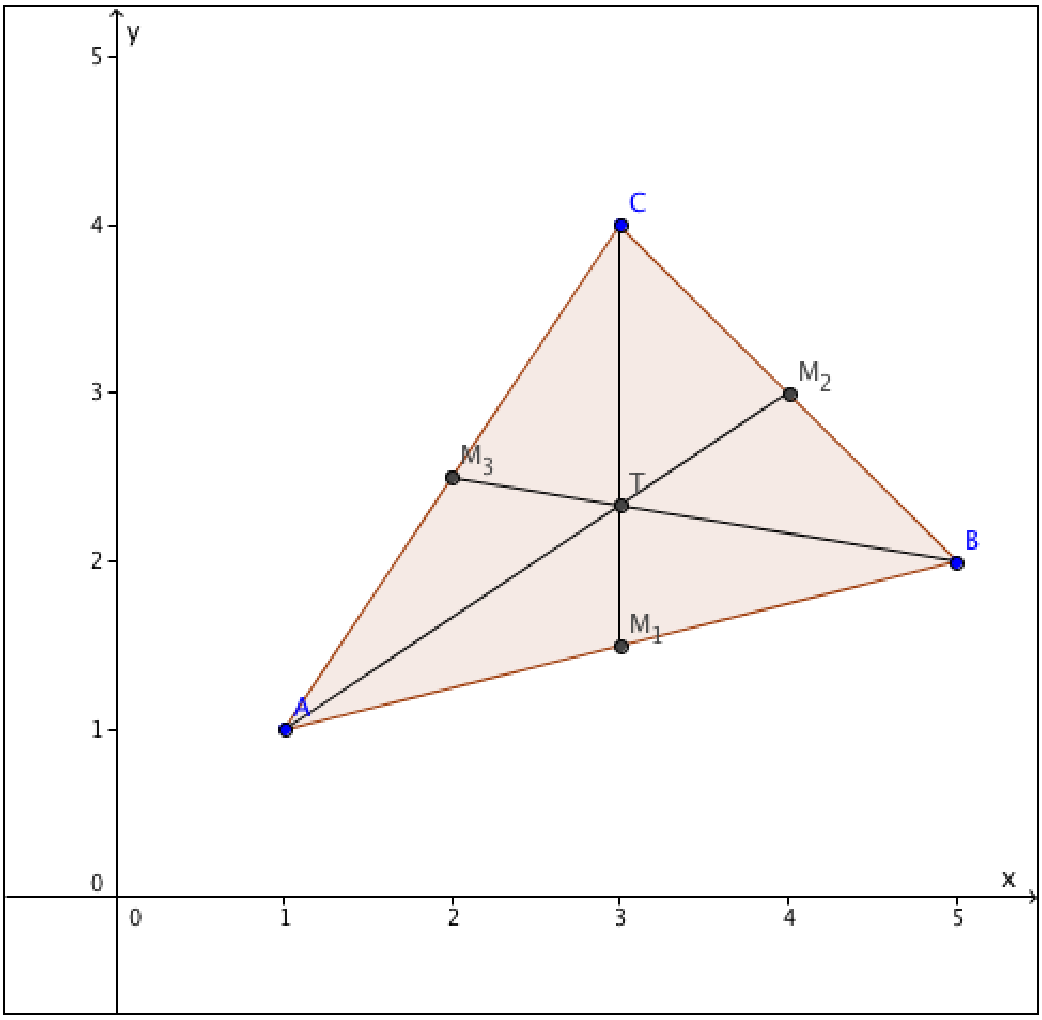
I tillegg vil potensene være like hvis begge har 1 som grunntall (da blir begge sidene 1 uavhengig av eksponenten). Dette skjer når $\underline{\underline{x = n}}$.

Vedlegg 1



Vedlegg 2

29 Mai 2013



Nr.	Navn	Verktøylinjeikon	Definisjon	Verdi
1	Punkt A			A = (1, 1)
2	Punkt B			B = (5, 2)
3	Punkt C			C = (3, 4)
4	Trekant Mangekant1		Mangekant A, B, C	Mangekant1 = 5
4	Linjestykke c		Linjestykke [A, B] av Trekant Mangekant1	c = 4.12
4	Linjestykke a		Linjestykke [B, C] av Trekant Mangekant1	a = 2.83
4	Linjestykke b		Linjestykke [C, A] av Trekant Mangekant1	b = 3.61

5	Punkt M_1		Midtpunkt på c	$M_1 = (3, 1.5)$
6	Punkt M_2		Midtpunkt på a	$M_2 = (4, 3)$
7	Punkt M_3		Midtpunkt på b	$M_3 = (2, 2.5)$
8	Linjestykke d		Linjestykke [C, M_1]	d = 2.5
9	Linjestykke e		Linjestykke [A, M_2]	e = 3.61
10	Linjestykke f		Linjestykke [B, M_3]	f = 3.04
11	Punkt T		Skjæringspunkt mellom f,e	T = (3, 2.33)

Laget med GeoGebra