1P Eksamen H2023 LK20 Løsningsforslag

Farhan Omar

30. november 2023

Figur 1: Hva er matematikk egentlig?!

DEL 1 (Uten hjelpemidler)

Oppgave 1 (2 poeng)

Tobias må drikke $2,1\,L$ vann i løpet av et døgn.

$$70 \cdot 30 = 2100mL = \frac{2100}{1000} = 2,1L$$

Oppgave 2 (2 poeng)

Nei, det stemmer ikke siden ni av 10 er 90%.

$$\frac{9}{10} = 0,9 = 90\%$$

For 5 år siden brukte 80% av nordmen sosiale medier,

$$88\% - 8\% = 80\%$$

Økningen på 8 prosentpoeng tilsvarer 10% økning,

$$\frac{8}{80} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$$

Oppgave 3 (2 poeng)

1) Sann fordi strøm og spenning er proporsjonale $I = k \cdot U$.

2) Usann fordi strøm og motstand er omvendt proporsjonale $I = \frac{k}{R}$ noe som betyr hvis en av dem øker vil den andre minke.

Oppgave 4 (2 poeng)

a)

Han har tatt utgangspunkt i store hunder og fant ut at det er en økning på 6 år for hver periode, noe som betyr at det er en lineær økning. Han brukte derfor en lineær funksjon til å representere det.

$$H(x) = ax + b$$

$$H(x) = 6x + b$$

Når alderen til hunden er 2 hundeår, tilsvarer det 24 menneskeår. Hvis vi bruker x som antall hundeår, har vi

$$\begin{aligned}
H(2) &= 24 \\
6 \cdot 2 + b &= 24 \\
12 + b &= 24 \\
b &= 24 - 12 = 12 \\
H(x) &= 6x + 12
\end{aligned}$$

Modellen er mest gyldig for store hunder når hundens alder er over 2 hundeår, og den gir dårlige svar før det.

$$\begin{aligned}
H\left(\frac{2}{12}\right) &= 6 \cdot \frac{2}{12} + 12 = \frac{2}{2} + 12 = 13 \\
H\left(\frac{4}{12}\right) &= 6 \cdot \frac{4}{12} + 12 = 1,5 + 12 = 13,5 \\
H\left(\frac{6}{12}\right) &= 6 \cdot \frac{6}{12} + 12 = 3 + 12 = 15 \\
H\left(\frac{8}{12}\right) &= 6 \cdot \frac{8}{12} + 12 = 4 + 12 = 16 \\
H\left(\frac{10}{12}\right) &= 6 \cdot \frac{10}{12} + 12 = \frac{10}{2} + 12 = 5 + 12 = 17 \\
H(1) &= 6 \cdot 1 + 12 = 18
\end{aligned}$$

Fra utregningen over ser vi at jo lavere hundealderen er enn 2 hundeår, jo mer avvik er det fra sanne verdier.

b)

Påstanden til Sondre er feil, siden hvis alderen til en hund er proporsjonal med alderen til et menneske, bør vi ha at

$$\frac{\text{Alderen til en hund}}{\text{Alderen til et menneske}} = kontant$$

.Vi regner dette forholdet for noen verdier av x og H:

Alder til en hund(x)	Alder til et menneske (H)	$\frac{x}{H}$
2	24	$\dfrac{2}{24} = \frac{1}{12}$
3	30	$\dfrac{3}{30} = \frac{1}{10}$
4	36	$\dfrac{4}{36} = \frac{1}{16}$

Tabell 1

Fra tabellen ser vi at forholdet mellom alderen til en hund og alderen til et menneske er ikke det samme og dermed er de ikke omvendt proporsjonale.

Oppgave 5 (2 poeng)

Vi vet at når en verdi G minker med $p\%$ da blir den nye verdien gitt ved:

$$N = G \cdot V$$
$$V = 1 + \frac{p}{100}$$

Vekstfaktor første året:

$$V_1 = 100\% - 20\% = 80\% = 0,8$$

Bilens verdi etter et år blir:

$$490000 \cdot 0.8$$

Vekstfaktor andre året året:

$$V_2 = 100\% - 14\% = 86\% = 0,86$$

Bilens verdi etter to år blir:

$$490000 \cdot 0,8 \cdot 0,86$$

DEL 2 (Med hjelpemidler)

Oppgave 1 (6 poeng)

a)

Vi legger punktene inn i regnearket i Geogebra og trekker 1952 fra hvert år slik at 0 tilsvarer 1952. Deretter lager jeg en liste med punkter ved å velge dataene og trykke på listetegnet i menyen. Videre bruker vi kommandoen *RegEksp(Liste med punkter)* for å få en eksponentialfunksjon

$$F(x) = 62622,623 \cdot 0,971^x$$

som passer best til dataene. Eksponentialmodellen passer godt fordi den følger trenden i dataene, det vil si at antallet fisker minker, men kommer aldri til å bli null.

	A	B
1	år	antall fiskere
2	0	65956
3	30	25289
4	40	19780
5	50	13841
6	60	9825
7	70	9591

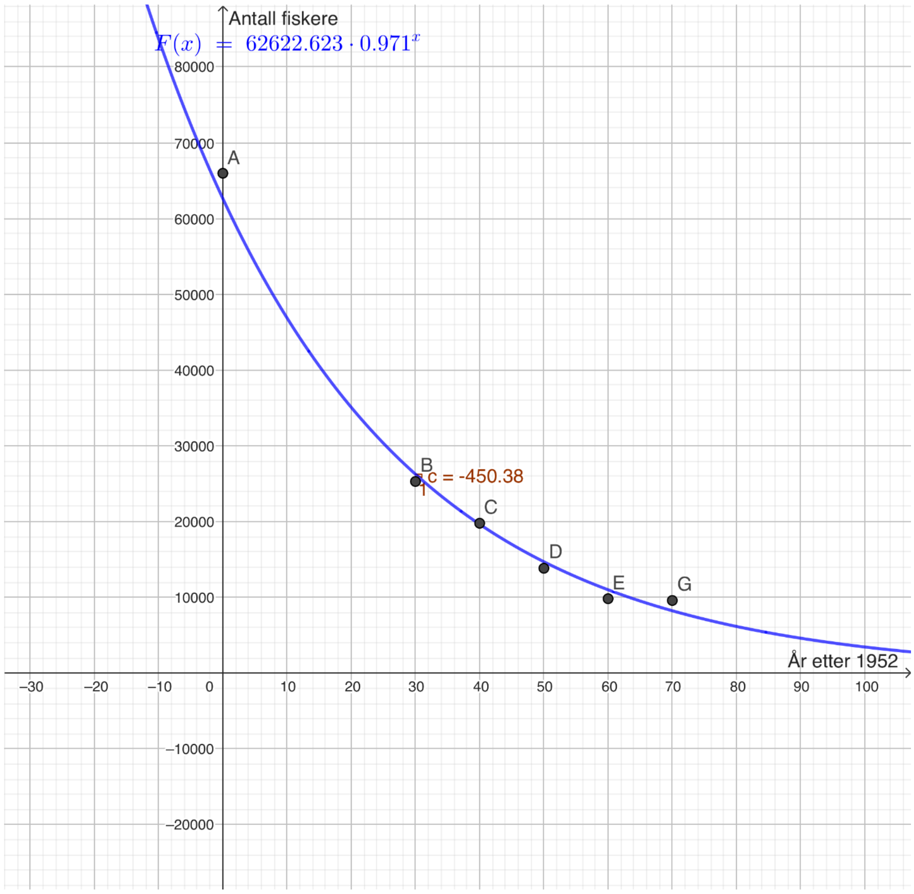
$l1 = \{A, B, C, D, E, G\}$

$= \{(0, 65956), (30, 25289), (40, 19780), (50, 13841), (60, 9825), (70, 9591)\}$

$F(x) = \text{RegEksp}(l1)$

$= 62622.623 \cdot 0.971^x$

Grafen til funksjon $F(x)$ er gitt nedenfor:



b)

Ifølge modellen forventes det å være 3658 personer som har fiske som hovedyrke i 2050. Modellen gir den mest pålitelige prediksjonen innenfor perioden vi har data for (1952 – 2022), og kanskje noen år fremover og bakover. Det er viktig å være forsiktig med å anvende modellen for å estimere antallet fiskere langt inn i fremtiden eller fortiden.

$$a = 2050 - 1952$$
$$= 98$$

$$b = F(98)$$
$$= 3658.134$$

c)

Vi bruker graftegner i geogebra og kommando *Linje(Punkt,Punkt)* for å tegne en rettlinje mellom de to punktene som er oppgitt i oppgaven. Vi finne stigningen til linjen ved å bruke kommando *Stigning(Linje)* eller kan man regene det manuelt (se siste raden)

	C)
	f : Linje((30, F(30)), (70, F(70))) = y = -450.38x + 39761.924
	c = Stigning(f) = -450.38
	$d = \frac{F(70) - F(30)}{70 - 30}$ = -450.38

Fra utklippet over ser vi at stigningen til linjen er -450 fiskere\år. Det betyr at antall fiskere har minket i gjennomsnitt med 450 fiskere per år fra 1982 til 2022.

Oppgave 2 (2 poeng)

Vi bruker Cas til å løse oppgaven. La L være lengden i rektangelet og B bredden, da blir arealet $A = L \cdot B$. Lengden (L) øker med 10% da blir den nye lengden L_1 (rad 1) . Bredden (B) øker med 20% , da blir den nye bredden B_1 (rad 2). Nytt areal blir A_1 (rad 3) og gammelt areal er $B \cdot L$, da blir prosentvisøkning i areal på 32% (rad 4,5)

1	$A := L \cdot B$ $\approx$ $\mathbf{A := B\ L}$
2	$L_1 := L\left(1 + \frac{10}{100}\right)$ $\approx$ $\mathbf{L_1 := 1.1\ L}$
3	$B_1 := B\left(1 + \frac{20}{100}\right)$ $\approx$ $\mathbf{B_1 := 1.2\ B}$
4	$A_1 := L_1\ B_1$ $\approx$ $\mathbf{A_1 := 1.32\ B\ L}$
5	$1.32 - 1$ $\approx$ $\mathbf{0.32}$
6	$0.32 \cdot 100$ $\approx$ $\mathbf{32}$

Figur 2

Oppgave 3 (6 poeng)

a)

Vi bruker CAS i geogebra til å løse oppgaven. Først må vi finne ut hvor mange sekunder det er i et år (rad 1), deretter deler vi antallet pølser på antall sekunder i året:

1	$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ $\approx$ $\mathbf{31536000}$
2	$\frac{500 \cdot 10^6}{31536000}$ $\approx$ $\mathbf{15.855}$

Det spises omtrent 16 pølser i gjennomsnitt hvert sekund i Norge.

b)

3 b)

4 $\dfrac{13 \cdot 10^6}{500 \cdot 10^6}$

$\approx$ **0.026**

5 $0.026 * 100$

$\approx$ **2.6**

Nordmen spiser $2,6\%$ av pølsene som spises i Norge på 17 mai.

c)

Vi må først finne omkretsen av jorden (rad 7), så blir lengden av en pølse gitt ved : $\frac{\text{Lengden av pølsene totalt (2,5 ganger jordens omkrets)}}{\text{Antall pøsler spist hvert år}}$. Vi må gange svaret med 1000 for å gå fra km til meter (m) og gange igjen med 100 for å gå fra meter til centimeter (cm).

6 c)

7 $O := 2\,\pi \cdot 6378$

$\approx$ $\mathbf{O := 40074.156}$

8 $\dfrac{2.5\ O}{500 \cdot 10^6} \cdot 1000 \cdot 100$

$\approx$ **20.037**

NRK har regnet at lengden av en pølse er $20\,cm$.

Oppgave 4 (2 poeng)

Først må vi finne hvor mange milligram teobromin det er i $200g$melkesjokoladen:

$$200g \cdot \frac{1,2mg}{1g} = 240mg$$

Hvis vi lær vekten av hunden være $x\,kg$ da må vi ha $\frac{\text{Mengden av sjokolade spist i mg}}{\text{Vekten av hunden i kg}} \leq 20$. Vi bruker Geogebra Cas til å løse ulikheten:

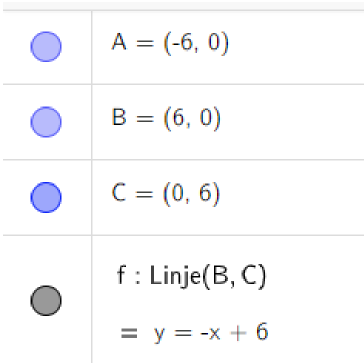
1 $\dfrac{240}{x} \leq 20$

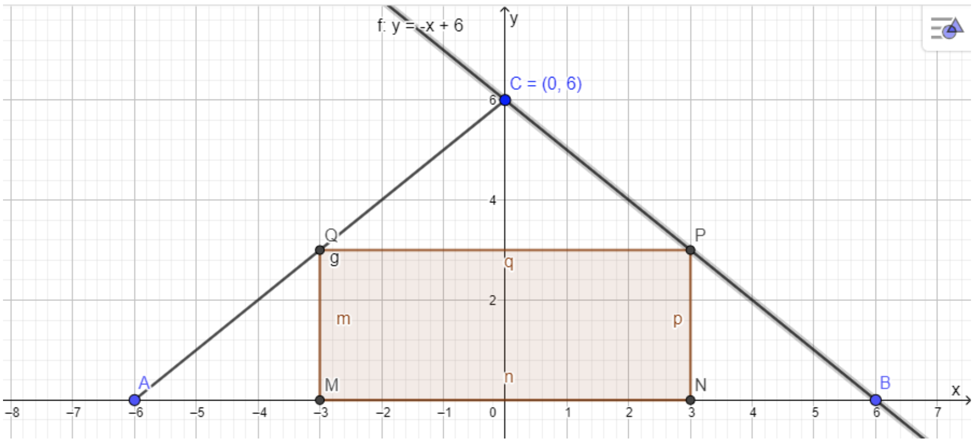
Løs: $\{x < 0, x \geq 12\}$

Hvis vekten av hunden Mira er 12 kg eller mer, trenger ikke Snorre å kontakte veterinæren. Men hvis vekten er mindre, må han gjøre det.

Oppgave 5 (6 poeng)

Vi bruker geogebra (graftegner) til finne ligningen for linjen som går gjennom punktene B og C:





Figur 3

Siden punktet P ligger på linjen da må den ha koordinatene $(x, 6-x)$. Der x blir halvparten av lengden av rektangelet og y er høyden (bredden) på rektangelet. Vi lager en oversikt i Excel for areal:

	A	B	C	D
1	x	Lengde (2*x)	Bredde(y=6-x)	Arealet
2	1	2	5	10
3	2	4	4	16
4	3	6	3	18
5	4	8	2	16
6	5	10	1	10
7	6	12	0	0

Figur 4

	A	B	C	D
1	x	Lengde (2*x)	Bredde(y=6-x)	Arealet
2	1	=2*A2	=6-A2	=B2*C2
3	2	=2*A3	=6-A3	=B3*C3
4	3	=2*A4	=6-A4	=B4*C4
5	4	=2*A5	=6-A5	=B5*C5
6	5	=2*A6	=6-A6	=B6*C6
7	6	=2*A7	=6-A7	=B7*C7

Figur 5: Med formler

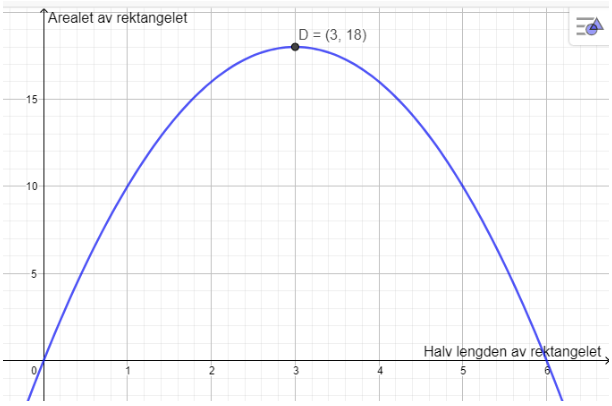
Fra tabellen ovenfor ser vi at arealet av rektangelet er størst når $P(x, y) = (3, 3)$

Vi kan også lage en funksjon for arealet av rektangelet $A1(x)$, så finne topppunktet via kommando *Ekstremalpunkt(Polynom)* via algebrafelt i geogebra

$A1(x) = 2x(6 - x)$

D = Ekstremalpunkt(A1)

= (3, 18)



Figur 6: Grafen til $A1(x) = 2x(6-x)$

Vi ser at arealet er størst når $x = 3$ og da blir $y = 6 - 3 = 3$ og punktet P har da koordinatene $(3, 3)$

Oppgave 6 (7 poeng)

a)

Vi regner summen via geogebra:

$$a = 100 + 100 \cdot 0.9 + 100 \cdot 0.9^2 + 100 \cdot 0.9^3 + 100 \cdot 0.9^4 + 100 \cdot 0.9^5 + 100 \cdot 0.9^6 + 100 \cdot 0.9^7$$
$$= 569.533$$

Fra utklippet over ser vi at summen av de 8 første linjestykkene blir $569,533\,cm$

b)

Vi kan bruke Python-programmet nedenfor for å regene summenav lengdene av linjestykkene ved å gi antall linjestykker (n)

```
L=100                 #Lengde på føsrte linjestykke
n=21                  # antall linjestykker
Sum=0
for i in range( n):
    Sum=Sum+L        # Regne summen
    L =L*0.9         # Ny lengde er 90% av forige lengde
print('Summen av de',n, 'første linjestykkene blir ',round(Sum/100,3),'meter')
```

```
Summen av de 21 første linjestykkene blir  8.906 meter
```

```python
L=100                #Lengde på føsrte linjestykke
n=22                  # antall linjestykker
Sum=0
for i in range( n):
    Sum=Sum+L        # Regne summen
    L =L*0.9         # Ny lengde er 90% av forige lengde
print('Summen av de',n, 'første linjestykkene blir ',round(Sum/100,3),'meter')
```

```
Summen av de 22 første linjestykkene blir  9.015 meter
```

Fra utskriften av programmet, ser vi at vi må ha minst 22 linjestykker for at summen skal bli minst 9 meter.

c)

Vi bruker programmet til å regner summen når antall linjestykker 50 og 100 så regner vi prosentvisøkning:

```python
L=100                #Lengde på føsrte linjestykke
n=50                  # antall linjestykker
Sum=0
for i in range( n):
    Sum=Sum+L        # Regne summen
    L =L*0.9         # Ny lengde er 90% av forige lengde
print('Summen av de',n, 'første linjestykkene blir ',round(Sum/100,3),'meter')
```

```
Summen av de 50 første linjestykkene blir  9.948 meter
```

```python
L=100                #Lengde på føsrte linjestykke
n=100                 # antall linjestykker
Sum=0
for i in range( n):
    Sum=Sum+L        # Regne summen
    L =L*0.9         # Ny lengde er 90% av forige lengde
print('Summen av de',n, 'første linjestykkene blir ',round(Sum/100,3),'meter')
```

```
Summen av de 100 første linjestykkene blir  10.0 meter
```

```python
økningProsent=( (10-9.948)/9.948 )*100
print(f'Summen av lengdene øker med {round(økningProsent,2)}% når antall linjestykker øker fra 50 til 100')
```

```
Summen av lengdene øker med 0.52% når antall linjestykker øker fra 50 til 100
```

Oppgave 7 (4 poeng)

a)

Vi setter $a = 3$ og $b = 2$ i utrykkene for h og O og bruker geogebra (algebrafelt) til å finne svaret.

$$h = \left(\frac{3-2}{3+2}\right)^2$$

$$\approx 0.04$$

$$O = \pi\,(3+2)\left(1 + \frac{3\,h}{10+\sqrt{4-3\,h}}\right)$$

$$= 15.865$$

Omkretsen av ellipsen blir $15,865\,cm$ og det er det samme som Mari har funnet.

b)

For en sirkel er begge halvaksene like og er lik radius av sirkelen. Vi setter $a = r$ og $b = r$ i utrykkene for h og O og regner svaret via Cas i geogebra:

1 $$h1 := \left(\frac{r-r}{r+r}\right)$$

$$\rightarrow \mathbf{h1 := 0}$$

2 $$O1 := \pi \cdot (r+r)\left(1 + \frac{3 \cdot h1}{1+\sqrt{4-3 \cdot h1}}\right)$$

$$\rightarrow \mathbf{O1 := 2\,r\,\pi}$$

Vi ser at omkretsen blir det samme som omkretsen til en sirkel med radius r.

Oppgave 8 (2 poeng)

Bane B er den riktige banen. Dette skyldes at banen begynner rett fra starten og litt etterpå, da bilen kan ha konstant fart. Deretter kommer en sving hvor bilen må redusere farten jevnt til en lav fart i svingen. Når svingen er ferdig, øker bilen farten igjen og kjører konstant med samme fart. Dette mønsteret gjentar seg. Vi observerer at det er tre bunnpunkter i grafen for farten, og det tilsvarer de tre svingene i banen. Den siste svingen er ikke veldig skarp.