

# Eksamen i Matematikk R1 23.05.2023

Cand. real. Egil Njål Håland

2023-Juli-14

## 1 Del 1

Denne kan vi se på en annen gang :-)

## 2 Del 2

### 2.1 Oppgave 1

Tabellen nedenfor viser timelønnen til en yrkesgruppe for noen år i perioden 2008-2022.

| Årstall  | 2008   | 2010   | 2013   | 2015   | 2019   | 2022   |
|----------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Timelønn | 272,55 | 285,50 | 307,30 | 314,00 | 327,60 | 340,10 |

Tabellen omfatter 15 år. Vi velger å kalle det første året (2008) for år 0 og det siste (2022) for år 14.

Her er det 9 år som det ikke er gjort rede for. Har det vært lønnsøkning i noen av disse årene, eller ikke? Dette er jo nok til å skape forvirring. Vi vil anta at det ikke var noen økning i de årene som ikke er tatt med i tabellen.

a) *Hva har den gjennomsnittlige årlige prosentvise veksten i lønn vært i årene 2008-2012?*

Egentlig kan vi ikke si noe om den prosentvise veksten i år 2008, for da måtte vi visst lønnen i 2007. Veksten starter jo først i 2010 i følge tabellen. Nok et uklart punkt.

Jeg antar at man her tenker på rentes-rente formelen med lønnen i 2008 som basis:

$$L(n) = L(0) \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \Rightarrow L(14) = L(0) \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{14} \quad (1)$$

Vi får da

$$1 + \frac{p}{100} = \left[\frac{L(14)}{L(0)}\right]^{\frac{1}{14}} = 1,0159 \Rightarrow p = 1,59 \% \quad (2)$$

b) *Bruk tallene i tabellen til å lage en eksponentialfunksjon  $g$  som er en modell for timelønnen til denne yrkesgruppen  $x$  år etter 2008.*

Med Excel får vi eksponentialfunksjonen

$$g(x) = 277,83 \cdot e^{0,0153x} = 277,83 \cdot 1,01542^x \quad (3)$$

*Per og Amalie hadde begge en timelønn på 272,55 kroner i 2008. Per har hatt en lønnsutvikling tilsvarende tabellen i starten av oppgaven, mens Amalies lønn har steget med 2,3 prosent per år. De har begge jobbet 1700 timer per år.*

c) *Bestem den samlede lønnen til Amalie i årene 2008 til 2022. Bestem også den samlede lønnen til Per i disse årene*

Startlønn for Amalie og Per er  $A(0) = P(0) = 272,55 \cdot 1700 = 463\,335$  kr. Vekstfaktoren til Amalie er  $r = 1 + \frac{p}{100} = 1,023$ . Da blir Amalies samlede lønn:

$$L_{Amalie} = \sum_{k=0}^{14} A(0) \cdot r^k = A(0) \cdot \frac{r^{15} - 1}{r - 1} = 463335 \cdot \frac{1,023^{15} - 1}{0,023} = 8\,188\,601 \text{ kr} \quad (4)$$

For å beregne Pers lønn må vi gjøre en antakelse som ikke er oppgitt i oppgaven. Vi må anta at det ikke har vært lønnsøkning i de årene som mangler i tabellen. Da kan vi beregne Pers lønn eksakt:

$$L_{Per} = 1700(2 \cdot 272,55 + 3 \cdot 285,50 + 2 \cdot 307,30 + 4 \cdot 314,00 + 3 \cdot 327,60 + 1 \cdot 340,10) = 7\,811\,670 \text{ kr} \quad (5)$$

Jeg ser at en i mange løsningsforslag har valgt å benytte funksjonen  $g(x)$  til å estimere Pers lønn. Da kan vi få:

$$L_{Per} = 1700 \cdot \sum_{k=0}^{14} g(k) = 1700 \cdot 277,83 \cdot \frac{1,01542^{15} - 1}{1,01542 - 1} = 7\,902\,928 \text{ kr} \quad (6)$$

Men  $g(x)$  er jo en estimert funksjon med stor usikkerhet og det ville da vært mer riktig å gi svaret som

$$L_{Per} = 7\,900\,000 \text{ kr} \pm 100\,000 \text{ kr} \quad (7)$$

Fagforeningen til Per krever at han i 2025 skal ha samme timelønn som Amalie. Vi går ut fra at Amalie fortsatt vil ha en lønnsvekst på 2,3 prosent per år.

d) Hvor mange prosent må lønnen til Per gå opp hvert år dersom dette kravet skal innfris?

Amalie vil i 2025 ha lønnen:

$$L_{Amalie}(2025) = A(0) \cdot r^{17} = 463335 \cdot 1,023^{17} = 681\,995 \text{ kr} \quad (8)$$

Per hadde i 2022 lønnen  $L_{Per}(2022) = 340,10 \cdot 1700 = 578\,170$  kr. Han skal i 2025 ha samme lønn som Amalie. Vekstraten til Per kaller vi  $r_0$ . Da får vi likningen:

$$L_{Per}(2022) \cdot r_0^3 = L_{Amalie}(2025) \Leftrightarrow r_0 = \left( \frac{681995}{578170} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,0566 \Rightarrow p_0 = 5,66 \% \quad (9)$$

Jeg antar at sensorene må godkjenne mange forskjellige svar på oppgave 1 c).