Del 1

Oppgave 1

a) 42 kr - 40 kr = 2 kr

$$\frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 5\%$$

b) Argument 2 er riktig.

2 av 42 er mindre enn 5%. Dette kan vi også regne ut ved å sette stykket opp om vi ønsker. Jo større prisen blir jo mindre del vil 2 kroner utgjøre, og derfor vil prisen stige med mindre og mindre prosent hvert år om den øker lineært.

Oppgave 2

a) Pausene er de stedene på grafen hvor den verken stiger eller synker. Ser at dette på Markus (blå) sin graf er fra 150-180 min, 330-360 min og 450-510 min.

Markus hadde altså pause i 2 timer totalt (120 min).

b) Leser av grafen at Emma (rød) beveget seg 1 km på 60 minutter. Altså 1 km på én time. Det gir en fart på 1 km/t

c) Emma brukte kortest tid ned og hadde minst pause ned fra fjellet. Hun hadde høyest tempo i starten før hun roet ned tempoet etter pausen. Markus tok det roligere i starten og tok en lengre pause på en hel time før han fortsatte nedover. Når han fortsatte etter pausen, hadde han et veldig høyt tempo (raskest av de begge) på $\frac{4}{1,5} = 2,67 km/t$.

Oppgave 3

a) Sannsynligheten for å trekke en grønn kule er $\frac{antall\ gunstige}{antall\ mulige} = \frac{grønne}{Antall\ kuler}$

Sannsynligheten for å trekke tre grønne kuler blir derfor:

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 1}{5 \cdot 9 \cdot 2} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

Det er altså $\frac{1}{6}$ sjanse for at alle tre kulene blir grønne (omtrent 16,7%).

b) Å trekke en hvit og to grønne kuler kan gjøres på tre ulike måter:

Grønn-Grønn-Hvit, Grønn-Hvit-Grønn, eller Hvit-Grønn-Grønn

Alle de tre alternativene over har lik sannsynlighet for å inntreffe, så vi kan regne ut et av utfallene sin sannsynlighet og dermed multiplisere på med 3:

Grønn-Grønn-Hvit gir:

$$\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{1}{6}$$

Altså kan vi multiplisere $\frac{1}{6}$ med 3 og får:

$$\frac{1}{6} \cdot 3 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Det er altså 50% sannsynlig at vi trekker én hvit kule og to grønne kuler.

Oppgave 4

a) At den relative frekvensen for to søsken er 0,4 betyr at 40% av elevene i klassen har to søsken.

At den kumulative frekvensen for to søsken er 16 betyr at 16 av elevene i klassen har 2 søsken eller mindre.

b) Siden alle de spurte elevene har søsken så kan vi bruke opplysningene vi får om antall som har kun en bror eller søster til å finne ut hvor mange elever det er i klassen.

Siden 4 elever kun har 1 søsken må resten ha 2 eller flere.

Siden det er 16 elever som har 2 eller mindre søsken må det da være 16-4=12 elever som har nøyaktig 2 søsken.

Siden disse 12 tilsvarer 40% av klassen kan vi regne ut hvor mange elever det er til sammen i klassen:

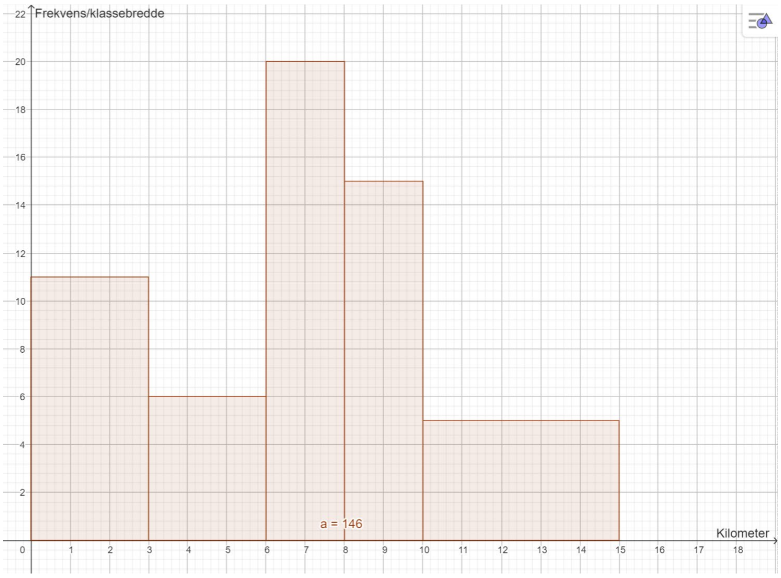
Regner ut hvor mange elever 10% tilsvarer: 12/4 = 3 elever

100% (altså antall elever i klassen) blir da: 3*10 = 30 elever.

Det er altså 30 elever til sammen i klassen.

Oppgave 5

For å lage et histogram for hånd lager man en tabell, finner klasebredden og regner frekvens/klassebredde for å finne høyden til søylene. Deretter setter man søylene opp i fra nedre til øvre klassegrense. Histogrammet bør se slik ut:



Oppgave 6

a) For å regne ut stigningstallet a kan vi dele differansen i y-verdi på differansen i x-verdi:

$$a = \frac{62 - 58}{0{,}8 - 0{,}4} = \frac{4}{0{,}4} = \frac{40}{4} = 10$$

Dette betyr at lengden på villaksen øker med omtrent 10 cm per kg over 1,5 kg.

Når vi skal regne oss frem til konstantleddet b i denne oppgaven er det enkleste å se på grafen av en økning med 0,4 betyr en endring på 4 cm. Det samme vil også gjelde bakover, så når vi nå skal finne ut hvor grafen treffer y-aksen kan vi trekke fra 0,4 kg og da altså også 4 cm. Det betyr at konstantleddet er $b = 54$.

Konstantleddet her forteller oss at en lask som er 1,5 kg er omtrent 54 cm lang.

b) 3,2 kg er 1,7 kg over 1,5 kg. 5,8kg er 4,3kg mer enn 1,5kg. Dette gir oss:

$$L(1{,}7) = 10 * 1{,}7 + 54 = 17 + 54 = 71cm$$

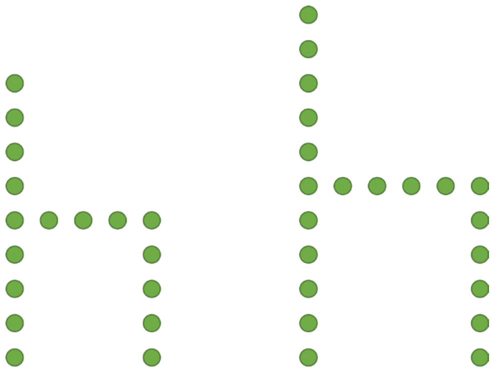
$$L(4{,}3) = 10 * 4{,}3 + 54 = 43 + 54 = 97cm$$

Ut fra de opplysningene vi har fått ser vi at modellen stemmer godt med den første laksen, men dårlig med den største. Dette betyr at vi vet at modellen er gyldig fra 1,5-3,2 kg, men vi vet ikke hvor mye større laksen kan bli før modellen ikke er gyldig lengre. Da trenger vi mer data.

Av: Jon Bjarne Bø

Oppgave 7

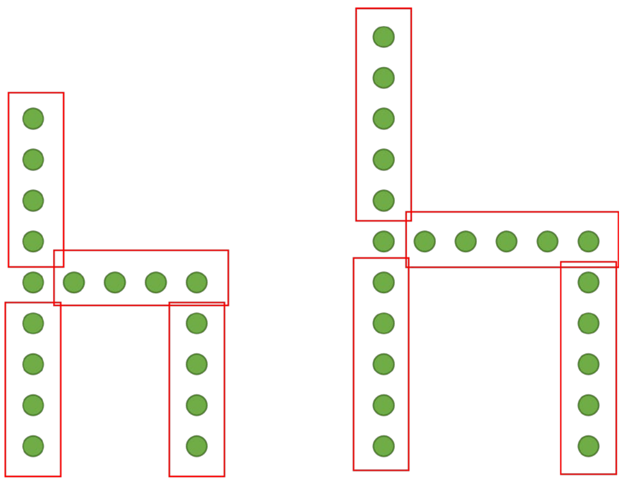
a) For å beskrive mønsteret og finne antall sirkler i figurene F_4 og F_5 så kan vi tegne de to figurene:



F_4 F_5

Vi ser da at det må være 17 sirkler i figur 4 og 21 sirkler i figur 5. Et annet mønster som kan beskrives er at hver figur vokser med 4 sirkler, så man trenger nødvendigvis ikke å tegne figurene.

b) For å bestemme et uttrykk for figurene kan det hjelpe å bryte ned figurene i mindre deler. Om vi ser på eksempelvis figur 4 og 5, kan vi se at selve figurtallet gjentar ser flere steder i figurene:



F_4 F_5

Det er altså 4 grupper med n sirkler i hver figur i tillegg til én ekstra sirkel. Dette gir oss formelen:

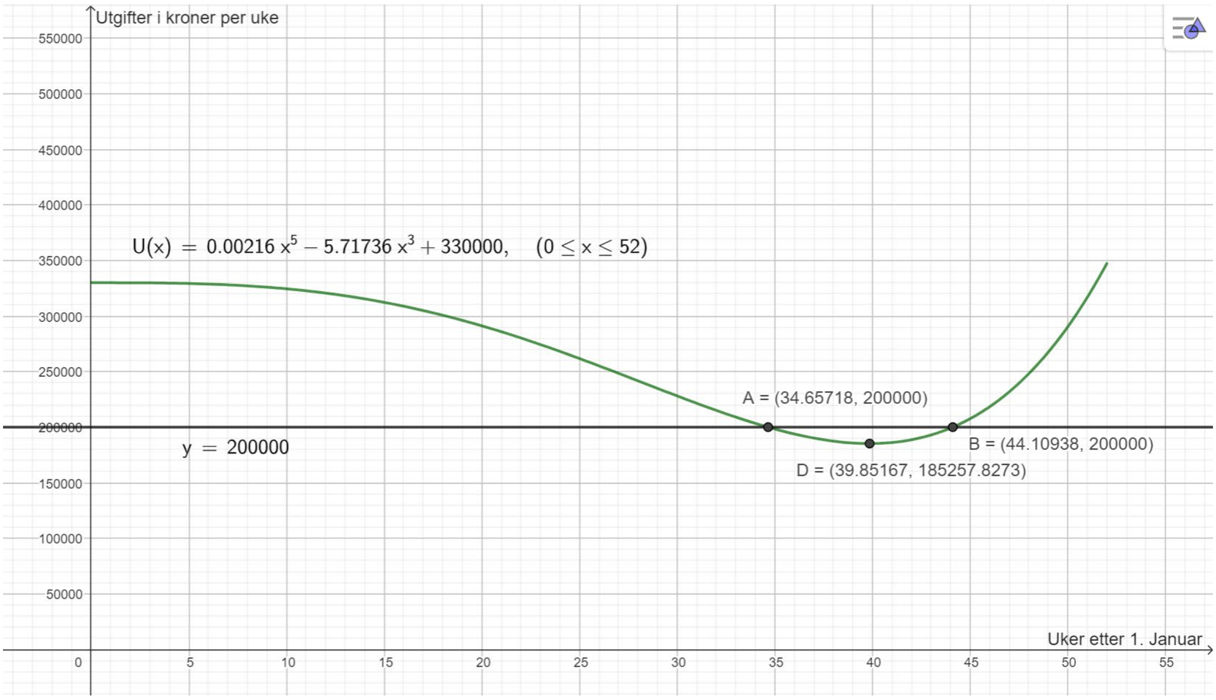
$$F_n = 4n + 1$$

Del 2

Oppgave 1

a, b og c)

Legger inn funksjonsuttrykket med begrensninger, navngir aksene, setter inn linja y=200000 og finner skjæring mellom linja og grafen (punktene A og B). Finner også bunnpunktet til grafen ved å bruke ekstremalpunkt-funksjonen i geogebra:



Som vi kan se av figuren over så regner ledelsen med at utgiftene er under 200000 kroner per uke mellom uke nummer 35 og 44. Vi ser også at utgiftene antas å være minst i uke 39.

Oppgave 2

91kg per person per år gir oss $91kg \cdot 10 = 910\ kg$ ris per person ila. 10 år.

Multipliserer mengden ris med antall personer i Kina og India og gjør om til standardform:

$910\ kg \cdot 2\,860\,000\,000 = 9{,}1 \cdot 10^2 \cdot 2{,}86 \cdot 10^9 = 9{,}1 \cdot 2{,}86 \cdot 10^{2+9} = 26{,}026 \cdot 10^{11} = \underline{2{,}6026 \cdot 10^{12}}$

I løpet at 10 år blir risforbruket altså $2{,}6026 \cdot 10^{12}$ kg ris i India og Kina til sammen.

Av: Jon Bjarne Bø

Oppgave 3

Det er 12 tall på arket. Om gjennomsnittet skal være 4 må summen av de 12 tallene være $12 \cdot 4 = 48$. Om vi summerer alle de synlige 11 tallene i oppgaven får vi:

$$4 + 5 + 0 + 4 + 2 + 6 + 5 + 7 + 5 + 5 + 3 = 46$$

Det betyr at om tallet det er sølt på enten er 0 eller 1 så er gjennomsnittet mindre enn 4. Hvis tallet er større enn, eller lik 2 så blir gjennomsnittet 4 eller mer.

Om vi ser på antall kaffekopper som blir drukket av de ulike kollegene til Tore så er det kun én av kollegene som har mindre enn 2 kopper kaffe dagen før, så sannsynligheten for at det tallet som er blitt sølt på er 2 eller høyere er ganske stor. Jeg støtter derfor antakelsen til Tore.

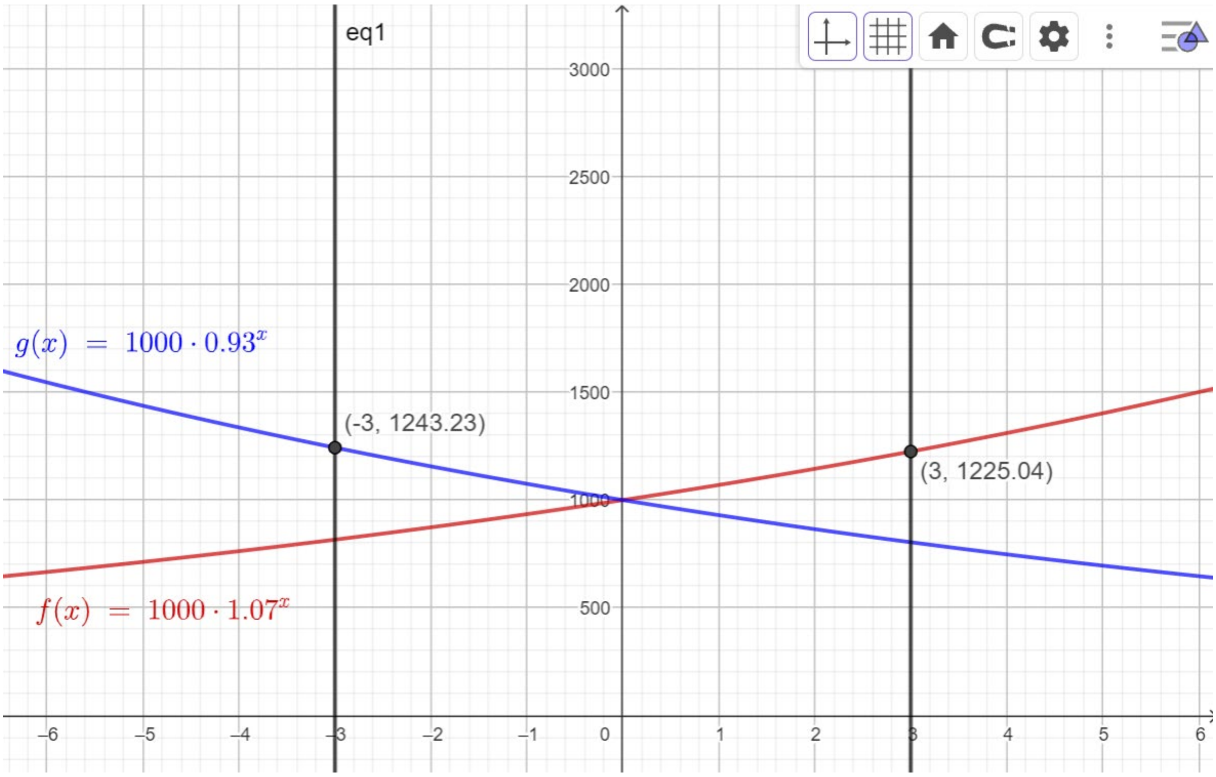
Oppgave 4

Det letteste her er å bestemme en verdi som begge varene nå har. Vi kan late som varene nå koster 1000 kroner.

Varen som øker i verdi, kan representeres med uttrykket $1000 \cdot 1{,}07^x$.

Varen som synker i verdi, kan representeres med uttrykket $1000 \cdot 0.93^x$.

Vi kan ga lage funksjoner i geogebra og se prisen på de ulike varene om vi går frem eller tilbake i tid.



Her er x=0 mai, så x=-3 gir oss verdiene for 3 måneder siden, og x=3 gir oss verdiene om 3 måneder. Om vi ser etter så vil ikke Malins påstand stemme, men det vil være ganske nære. Vare B hadde en litt høyere verdi for tre måneder siden enn det vare A vil ha om tre måneder.

Oppgave 5

Denne oppgaven er åpen og kan tolkes og illustreres på flere ulike måter. Dette er kun mitt forslag til løsning.

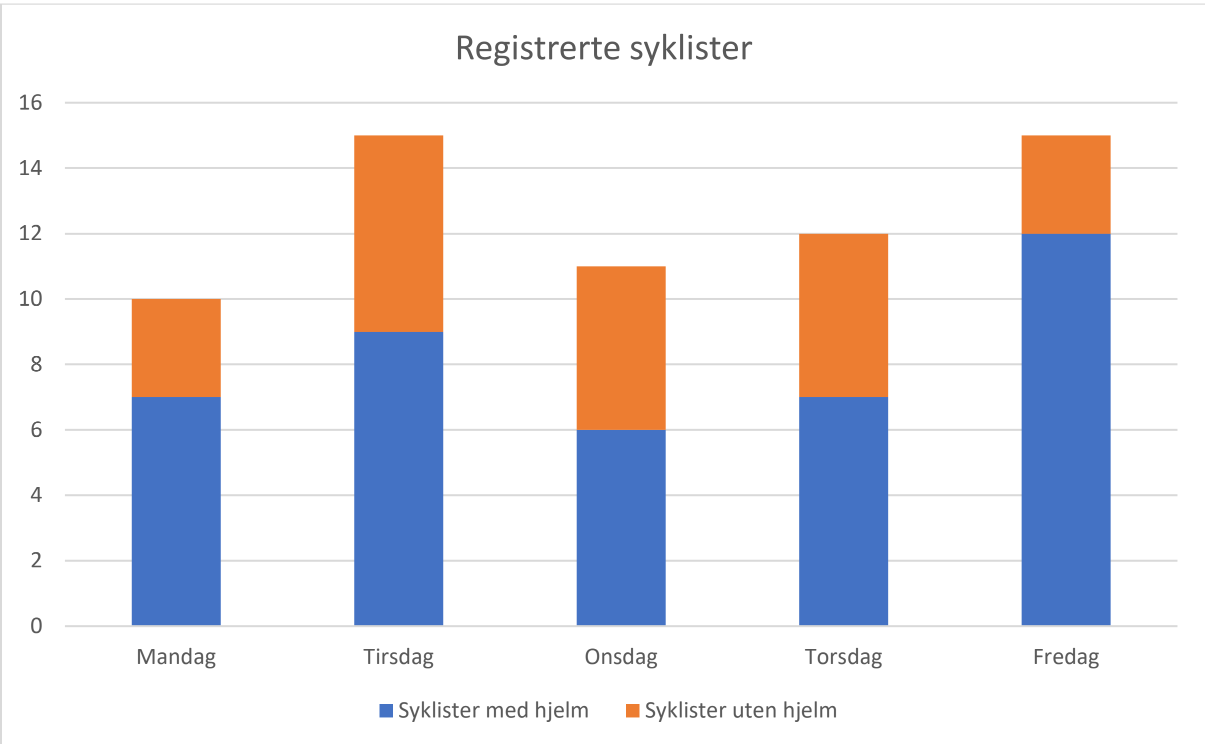
Utvidelse av tabell med utregninger som kan være av interesse:

Ukedag	Syklister	Syklister med hjelm	Syklister uten hjelm	Andel syklister med hjelm i prosent	Andel syklister uten hjelm i prosent
Mandag	10	7	3	70,0	30,0
Tirsdag	15	9	6	60,0	40,0
Onsdag	11	6	5	54,5	45,5
Torsdag	12	7	5	58,3	41,7
Fredag	15	12	3	80,0	20,0
SUM	**63**	**41**	**22**	**65,1**	**34,9**

Gjennomsnittlig antall syklister per dag:	12,6	syklister
Gjennomsnittlig antall syklister med hjelm per dag:	8,2	syklister

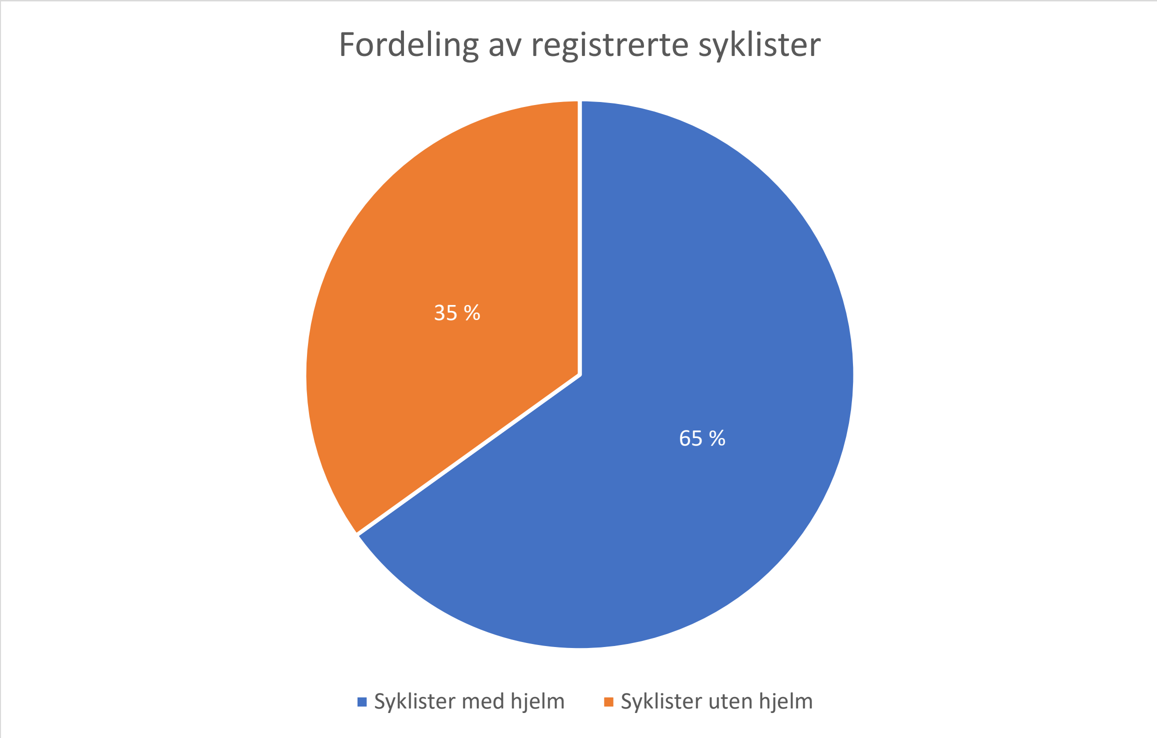
	A	B	C	D	E	F	G
1							
2		Ukedag	Syklister	Syklister med hjelm	Syklister uten hjelm	Andel syklister med hjelm i prosent	Andel syklister uten hjelm i prosent
3		Mandag	10	7	=C3-D3	=D3/C3*100	=100-F3
4		Tirsdag	15	9	=C4-D4	=D4/C4*100	=100-F4
5		Onsdag	11	6	=C5-D5	=D5/C5*100	=100-F5
6		Torsdag	12	7	=C6-D6	=D6/C6*100	=100-F6
7		Fredag	15	12	=C7-D7	=D7/C7*100	=100-F7
8		**SUM**	**=SUMMER(C3:C7)**	**=SUMMER(D3:D7)**	**=SUMMER(E3:E7)**	**=D8/C8*100**	**=100-F8**
9							
10				Gjennomsnittlig antall syklister per dag:	=C8/5	syklister	
11				Gjennomsnittlig antall syklister med hjelm per dag:	=D8/5	syklister	
12							

Jeg har valgt å sette opp tre ulike diagrammer for å vise frem dataene på ulike måter. Det første diagrammet er et stablet stolpediagram som viser tydelig fordelingen av de som bruker og ikke bruker hjelm samtidig som vi ser det totale antallet syklister på en oversiktlig måte:

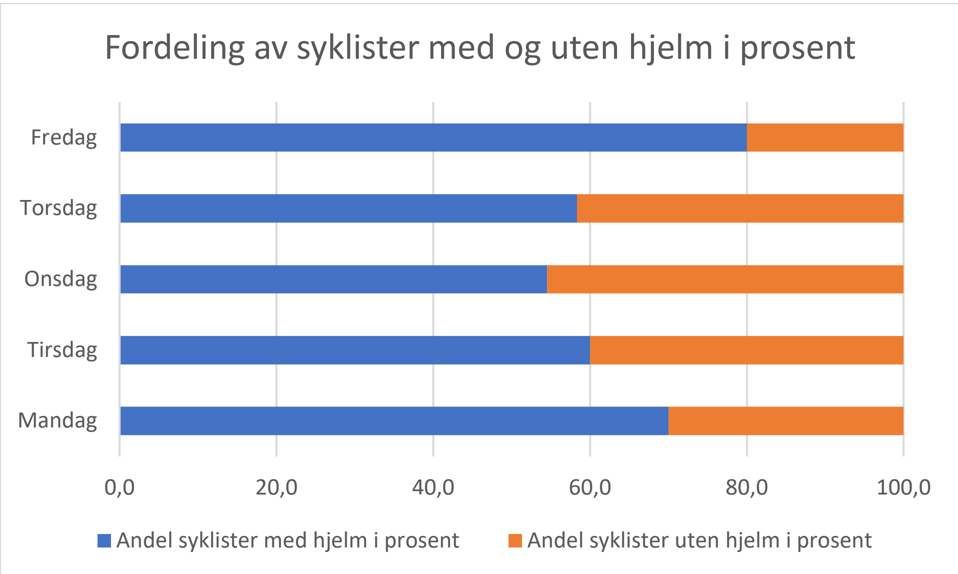


Løsningsforslag 2P-Y eksamen Vår 2023 (LK06)

Det neste diagrammet tydeliggjør forskjellene mellom de som bruker og ikke bruker hjelp totalt sett i løpet av uka ved å sammenlikne dem i et sektordiagram:



Til slutt kan det også være av interesse å ikke tenke på hvor mange som syklet hver dag, men heller sette søkelys på fordelingen av hjelm og ikke hjelm hver dag. Da kan man for eksempel sette opp et liggende stolpediagram med andelsfordelingen av de to gruppene hver dag:



Andre beregninger som kan være interessante kan være beregninger for spredning som standardavvik, varians eller variasjonsbredde, men det går jeg ikke noe mer innpå her.

Av: Jon Bjarne Bø

Oppgave 6

a) Fordi vi ikke vet fordelingen av årslønnene innad i intervallene må vi anta at dataene er jevnt fordelt når vi skal regne.

Gjennomsnitt

Om vi gjør denne antakelsen kan vi ta utgangspunkt i middelverdien i hvert intervall for å regne ut et estimat for gjennomsnittslønnen:

Uten formler:

Årslønn (i tusen kroner)		Klassemidtpunkt	Frekvens	Frekvens * klassemidtpunkt
Startverdi	Sluttverdi			
250	350	300	8	2400
350	450	400	42	16800
450	500	475	40	19000
500	550	525	20	10500
550	600	575	15	8625
600	650	625	3	1875
650	750	700	2	1400
750	1000	875	1	875
1000	2000	1500	15	22500
SUM			146	83975

Estimert gjennomsnittslønn (i tusen kroner): 575,171

Med formler:

	B	C	D	E	F
1					
2	Årslønn (i tusen kroner)		Klassemidtpunkt	Frekvens	Frekvens * klassemidtpunkt
3	Startverdi	Sluttverdi			
4	250	=B5	=(B4+C4)/2	8	=D4*E4
5	350	=B6	=(B5+C5)/2	42	=D5*E5
6	450	=B7	=(B6+C6)/2	40	=D6*E6
7	500	=B8	=(B7+C7)/2	20	=D7*E7
8	550	=B9	=(B8+C8)/2	15	=D8*E8
9	600	=B10	=(B9+C9)/2	3	=D9*E9
10	650	=B11	=(B10+C10)/2	2	=D10*E10
11	750	=B12	=(B11+C11)/2	1	=D11*E11
12	1000	2000	=(B12+C12)/2	15	=D12*E12
13	SUM			=SUMMER(E4:E12)	=SUMMER(F4:F12)
14					
15	Estimert gjennomsnittslønn (i tusen kroner):			=F13/E13	
16					

Vi kan regne ut at et godt estimat for gjennomsnittslønnen er 575 171 kroner. Det er kun et estimat for gjennomsnittet fordi vi har gjort en antakelse om at lønningene er jevnt fordelt.

Av: Jon Bjarne Bø

Median

For å regne ut medianen må vi først finne ut hvilken klasse medianen ligger i. Vi vet at medianverdien er den verdien i midten når vi har datamaterialet sortert i stigende rekkefølge, så medianen her må være verdi nummer $\frac{146}{2} = 73$. Altså vil lønning nummer 73 være medianlønnen. Om vi så tar for oss gruppe for gruppe ser vi at de to øverste gruppene i tabellen (med de laveste lønningene) til sammen utgjør 50 personer. Det betyr at medianen må befinne seg i det neste intervallet: $[450 - 500\,\rangle$.

For å regne oss frem til en nøyaktig median må vi finne ut verdien i intervallet som svarer til person nummer 23 (siden 73 – 50 = 23, når vi trekker fra de første intervallene).

Siden det er 40 personer i intervallet så vet vi også at medianen er omtrent midt i intervallet når det er jevnt fordelt siden 23 er nesten halvparten av 40, men vi kan også estimere mer nøyaktig ved regning:

$$\frac{klassebredde}{frekvens} = \frac{50}{40} = 1{,}25$$

Det betyr at hver person i intervallet tjener 1 250 kroner mer for hver person man teller oppover om årslønnene er jevnt fordelt. Vi kan da legge dette til startlønnen i dette intervallet og multiplisere med antall vi skal telle oss bortover for å finne medianen:

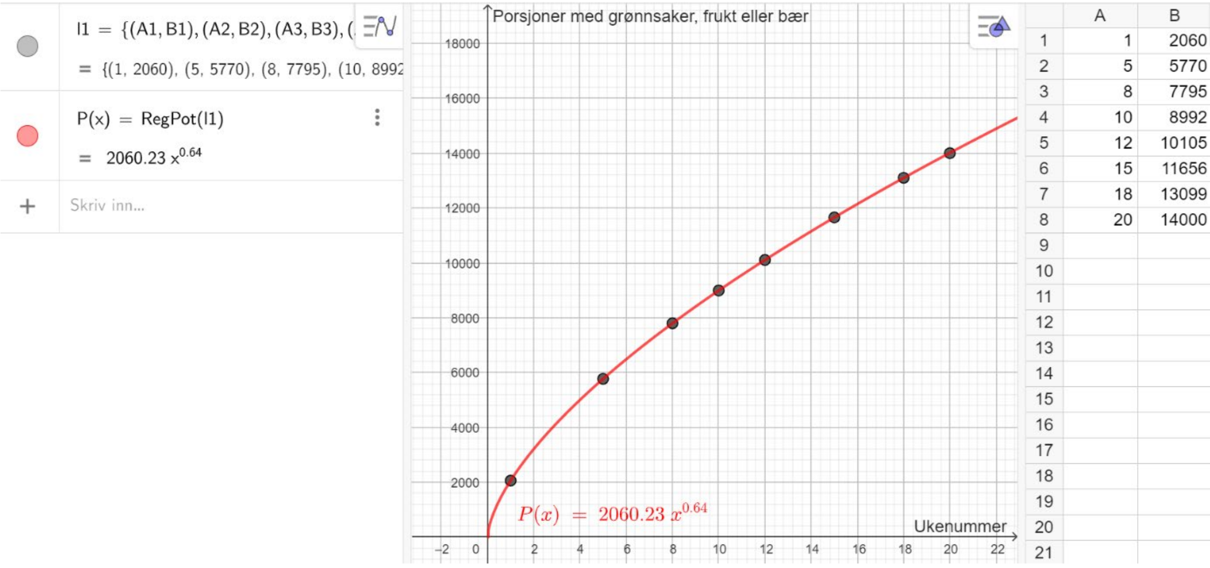
$$450 + 1{,}25 \cdot 23 = 450 + 28{,}75 = 478{,}75$$

Medianlønnen kan vi altså anslå til å være 478 750 kroner. Dette er også kun et estimat basert på at alle årslønnene er jevnt fordelt.

b) Som vist i forrige deloppgave så gir de to sentralmålene veldig forskjellig verdi. Grunnen til at gjennomsnittet er så mye høyere enn medianen er fordi at det trekkes veldig opp av lønningene i den høyeste gruppen (de som tjener over én million). Her er lønningene så mye høyere enn det de fleste andre i bedriften tjener og derfor trekkes gjennomsnittet opp.
Jeg mener derfor at median er det sentralmålet som passer best til å beskrive årslønnene i bedriften da det ikke påvirkes i noen særlig grad av de få høye lønningene.

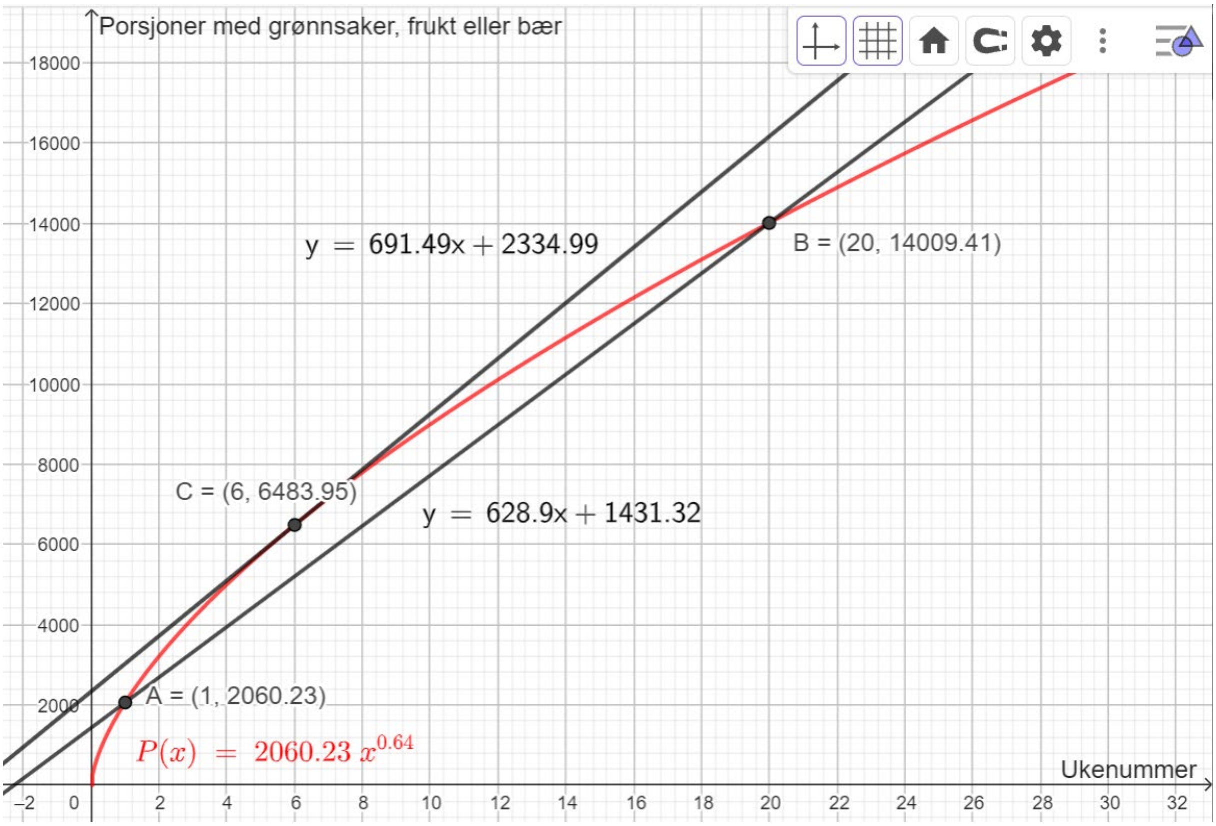
Oppgave 7

a) Ser at funksjonen skal være en potensfunksjon, så legger inn tabellen med verdier i Geogebra, velger regresjonsanalyse og potensfunksjon. Kommer frem til følgende modell: $P(x) = 2060{,}23x^{0.64}$



b) og c)

Siden jeg allerede har grafen i geogebra velger jeg å gjøre begge disse deloppgavene grafisk der. Jeg legger inn punktene som er spesifisert i oppgaven, lager en linje mellom punktene hvor x=1 og x=20, og lager en tangent i punktet på grafen hvor x=6:



Stigningstallet til den nederste rette linjen (gjennom punktene hvor x=1 og x=20) forteller oss at antall porsjoner med grønnsaker, frukt og bær i gjennomsnitt har vokst med 628,9 hver uke mellom uke 1 og uke 20.

Stigningstallet til den øverste linjen forteller oss om den momentane vekstfarten i uke 6, og gir et anslag på hvor mye økning i antall porsjoner det var akkurat denne uka. Siden stigningstallet her er 691,49 betyr det at det i uke 6 vokste med så mange porsjoner.

Oppgave 8

a) Hvis det er dobbelt så mange som ikke spiller fotball som de som spiller fotball, må skoleklassen være mulig å dele på 3. Siden vi også får beskjed om at ¼ av klassen spiller i korps må også skoleklassen kunne deles i 4. Siden vi vet at klassen er mellom 20 og 30 elever så må det da være 24 elever i klassen siden det er det eneste antallet som kan deles både på 4 og på 3.

b) Krysstabell:

	Korps	Ikke korps	Sum
Fotball	3	$8-3=5$	$\frac{24}{3}=8$
Ikke fotball	$6-3=3$	$18-5=13$	$24-8=16$
Sum	$\frac{24}{4}=6$	$24-6=18$	24

c) Siden det er 5 elever som spiller fotball, men ikke korps blir sannsynligheten da:

$$\frac{5}{24}=0{,}2083=20{,}83\%$$

d) Siden det er 8 som spiller fotball og av disse så er det 5 stk som ikke spiller i korps. Det gir oss sannsynligheten for at en elev som spiller fotball ikke spiller i korps til å være:

$$\frac{5}{8}=0{,}625=62{,}5\%$$