

Løsningsforslag eksamen R1 Høsten 2017

Del 1

Oppgave 1

a)

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{6x - 2}}$$

b)

$$g(x) = x^2 e^x$$

$$g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 e^x = \underline{\underline{x(2+x)e^x}}$$

c)

$$h(x) = \ln(x^3 - 1)$$

$$h'(x) = \frac{1}{x^3 - 1} \cdot 3x^2 = \underline{\underline{\frac{3x^2}{x^3 - 1}}}$$

Oppgave 2

$$\begin{aligned} 2 \ln b - \ln\left(\frac{1}{b}\right) - \ln(ab^2) + \ln\left(\frac{a}{b^2}\right) &= 2 \ln b - (\ln 1 - \ln b) - (\ln a + \ln b^2) + \ln a - \ln b^2 \\ &= 2 \ln b - 0 + \ln b - \ln a - 2 \ln b + \ln a - 2 \ln b \\ &= \underline{\underline{-\ln b}} \end{aligned}$$

Oppgave 3

$$\text{a) } \vec{a} - 2\vec{b} = [3, 1] - 2[4, 2] = [3 - 2 \cdot 4, 1 - 2 \cdot 2] = [3 - 8, 1 - 4] = \underline{\underline{[-5, -3]}}$$

$$\text{b) } \vec{a} \cdot \vec{b} = [3, 1] \cdot [4, 2] = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 12 + 2 = \underline{\underline{14}}$$

c)

$$\vec{b} = k \cdot \vec{c}$$

$$[4, 2] = k[t + 1, 3]$$

$$[4, 2] = [kt + k, 3k]$$

Dette gir oss likningene $3k = 2 \wedge kt + k = 4$

$$3k = 2 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

som innsatt i den andre likningen gir:

$$\frac{2}{3}t + \frac{2}{3} = 4$$

$$2t + 2 = 12$$

$$t = \frac{12 - 2}{2} = 5$$

$$\underline{\underline{\vec{b} \parallel \vec{c} \text{ når } t = 5}}$$

d)

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|$$

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2$$

$$(t+1)^2 + 3^2 = 3^2 + 1^2$$

$$t^2 + 2t + 1 + 9 = 9 + 1$$

$$t^2 + 2t = 10 - 10$$

$$t^2 + 2t = 0$$

$$t(t+2) = 0$$

så

$$\underline{\underline{t = -2 \vee t = 0}}$$

Oppgave 4

- a) $\triangle ABC$ har grunnlinje x og høyde $f(x) = 2(x-3)^2$, så arealet F av trekanten er gitt ved

$$F(x) = \frac{x \cdot f(x)}{2} = \frac{x \cdot 2(x-3)^2}{2} = x(x-3)^2 = x(x^2 - 6x + 9) = x^3 - 6x^2 + 9x,$$

som skulle vises

- b) $F'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$$F'(x) = 0$$

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$3(x-3)(x-1) = 0$$

gir

$$x_1 = 3 \vee x_2 = 1$$

Siden vi har at $0 < x < 3$, bruker vi $x = 1$ videre.

$$F''(x) = 6x - 12 \Rightarrow F''(1) = -6$$

Siden den andrederiverte er negativ for $x = 1$, vet vi at grafen vender den hule siden ned, slik at punktet $(1, F(1))$ må være et toppunkt.

Arealet av $\triangle ABC$ er størst når $x = 1$

c)

$$F(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 = 8 - 24 + 18 = 2$$

Når $x = 2$ er arealet lik 2

Ser om likningen $F(x) = 2$ har flere løsninger:

$$F(x) = 2$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x = 2$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x - 2 = 0$$

Siden $F(2) = 2$, vet vi at $(x - 2)$ er faktor i $x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

$$(x^3 - 6x^2 + 9x - 2) : (x - 2) = x^2 - 4x + 1$$

$$\underline{x^3 - 2x^2}$$

$$-4x^2 + 9x - 2$$

$$\underline{-4x^2 + 8x}$$

$$x - 2$$

$$\underline{x - 2}$$

$$0$$

og

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

gir

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

Vi ser at potensielle x -verdier er $2 \pm \sqrt{3}$

$1 < \sqrt{3} < 2$, så $2 + \sqrt{3} > 3$, mens $2 - \sqrt{3} > 0$

Det er altså kun én annen x -verdi enn 2 som gir areal lik 2.

$\triangle ABC$ har areal lik 2 når $x = 2 - \sqrt{3}$ og når $x = 2$

Oppgave 2

- a) Vi har et *ordnet* utvalg *med* tilbakelegging.
Vi skal gjennomføre 4 valg med 10 alternativer i hvert valg.
 $10^4 = 10000$

Det finnes 10 000 ulike koder for nøkkelpokser av denne typen

- b) Vi har et *uordnet* utvalg *uten* tilbakelegging.

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10}{2} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{7}{1} = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 210$$

Det finnes 210 mulige koder for nøkkelpokser av denne typen

- c) Binomialkoeffisienten er gitt ved $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Vi har $n = 10$ og skal finne den k som gjør at binomialkoeffisienten blir størst mulig.

Da må nevneren i brøken $\frac{10!}{k!(10-k)!}$ være så liten som mulig.

Vi kan se at $k = 10$ og $k = 0$ gir samme nevner

$$0!(10-0)! = 1 \cdot 10! = 10! \text{ og } 10!(10-10)! = 10! \cdot 0! = 10! \cdot 1 = 10!$$

Vi kan se at $k = 1$ og $k = 9$ gir samme nevner

$$1!(10-1)! = 1! \cdot 9! = 9! \text{ og } 9!(10-9)! = 9! \cdot 1! = 9!$$

Vi kan se at $k = 2$ og $k = 8$ gir samme nevner

$$2!(10-2)! = 2! \cdot 8! \text{ og } 8!(10-8)! = 8! \cdot 2!$$

Vi ser at verdiene til nevneren er symmetriske om en k -verdi og minker når vi beveger oss inn mot midten av intervallet $[0,10]$. Verdien i midten er $k = 5$, så det er denne som vil gi den minste nevneren i brøken over.

$$\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{10}{5} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{8}{4} \cdot \frac{7}{1} \cdot \frac{6}{2} = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 3 = 252$$

For at antallet mulige koder skal bli størst, må vi velge 5 tall til koden.

Da er det 252 muligheter

Her hadde det kanskje vært like enkelt å regne ut for alle mulige k -verdier, men her valgte en litt annerledes tilnærming (en slags optimering).

Oppgave 6

$$a) \quad \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = [3, -2] + \frac{1}{2}[1 - 3, 4 - (-2)] = [3, 2] + [-1, 3] = [2, 1]$$

Posisjonsvektoren til M er $[2, 1]$, så M har koordinater $(2, 1)$, som skulle vises

- b) Siden M ligger på ℓ , kan det brukes som fast punkt.

Vi ser at ℓ også går gjennom punktet $(-1, 0)$, så det kan vi bruke for å finne stigningstallet.

$$\frac{1 - 0}{2 - (-1)} = \frac{1}{3}, \text{ så stigningstallet til } \ell \text{ er } \frac{1}{3}.$$

Da kan vektoren $[3, 1]$ være retningsvektor for ℓ .

Punktet $M(1, 2)$ og retningsvektoren $[3, 1]$ gir følgende parameterfremstilling:

$$\ell : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}, \text{ som skulle vises}$$

- c) Setter inn koordinatene $\left(12, \frac{9}{2}\right)$ i parameterfremstillingen.

$$2 + 3t = 12 \Rightarrow t = \frac{10}{3} \text{ og } 1 + t = \frac{9}{2} \Rightarrow t = \frac{9}{2} - 1 = \frac{7}{2}$$

$$\frac{10}{3} \neq \frac{7}{2}, \text{ så punktet } \left(12, \frac{9}{2}\right) \text{ ligger ikke på linja } \ell$$

- d) Siden *alle* midtnormalene i en trekant skjærer hverandre i *ett* punkt, velger jeg heller å finne skjæringspunktet mellom ℓ og midtnormalen på BC . Siden BC er parallell med x -aksen, må midtnormalen være parallell med y -aksen.

$$\frac{9 - 1}{2} = 4, \text{ så } x\text{-koordinaten til midtpunktet på } BC \text{ er } 4. \text{ Siden denne}$$

midtnormalen er parallell med y -aksen, vil alle punktene har x -koordinat 4, inkludert skjæringspunktet med ℓ .

Setter x -koordinaten i parameterfremstillingen for ℓ lik 4 og finner den tilhørende t -verdien.

$$2 + 3t = 4 \Rightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$\text{Da har vi } y = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Skjæringspunktet mellom } \ell \text{ og midtnormalen på } AB \text{ er } \left(4, \frac{5}{3}\right)$$

Oppgave 7

a)

$$\begin{array}{ll}
 x^2 = 1 & x = 1 \\
 x = \pm\sqrt{1} & \text{og} \quad x^2 = 1^2 \\
 x = -1 \vee x = 1 & x^2 = 1
 \end{array}$$

Vi ser at det er implikasjon fra venstre mot høyre, men ikke omvendt.

$$\underline{\underline{x^2 = 1 \Leftarrow x = 1}}$$

b)

$$f(x) = 5x^2 - 1$$

gir

$$f'(x) = 10x$$

Vi ser at det er implikasjon fra venstre mot høyre, men vi vet også at den deriverte av en konstant er lik 0.

For eksempel kan vi si at

$$f(x) = 5x^2 - 8$$

gir

$$f'(x) = 10x$$

Så det er ikke implikasjon fra venstre mot høyre.

$$\text{Vi har altså } \underline{\underline{f(x) = 5x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 10x}}$$

Oppgave 8

Siden tangenten er ei rett linje som går gjennom origo vil stigningstallet kunne uttrykkes slik:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{e^{1-x}}{x}.$$

Samtidig må stigningstallet være lik $f'(x) = e^{1-x}(-1) = -e^{1-x}$, siden det er snakk om en tangent. Vi kan nå finne x -koordinaten til tangeringspunktet, ved å løse likningen

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{f(x)}{x} \\
 -e^{1-x} &= \frac{e^{1-x}}{x} \\
 x &= \frac{e^{1-x}}{-e^{1-x}} = -1
 \end{aligned}$$

Stigningstallet til tangenten er altså $f'(-1) = -e^{1-(-1)} = -e^2$

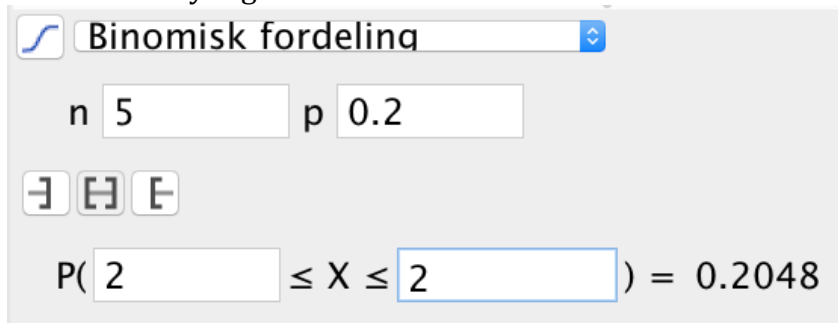
Likningen til tangenten til f , som går gjennom origo er $\underline{\underline{y = -e^2 x}}$

Del 2

Oppgave 1

- a) Siden det alltid er 20 mulige utfall, der fire er gunstige for hendelsen "neste sang er en Kygo-sang", vil vi ha $p = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = 0,2$, som skulle forklares

- b) Bruker sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra



Binomisk fordeling

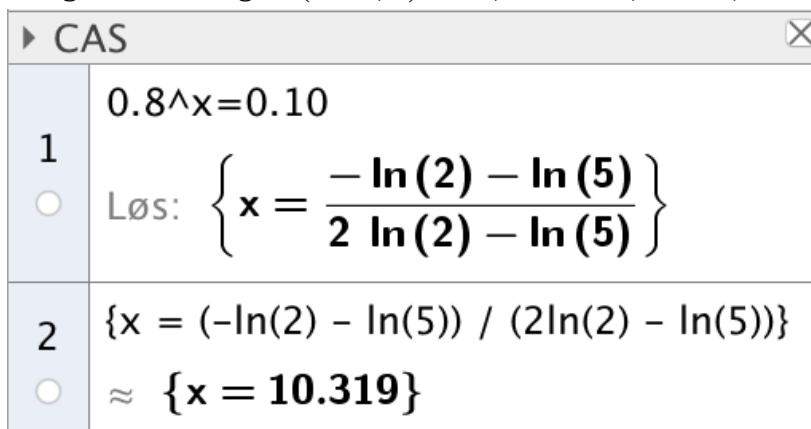
n 5 p 0.2

$P(2 \leq X \leq 2) = 0.2048$

Det er 20,48 % sannsynlig at de nøyaktig 2 av de 5 neste sangene er Kygo-sanger

- c) Hvis det skal være 90 % sannsynlig at minst én sang skal være med Kygo, må det samtidig være 10 % sannsynlig at *ingen* av sangene skal være med Kygo.

Det gir oss likningen $(1 - 0,2)^x = 0,1$, altså $0,8^x = 0,1$.



CAS

1 $0.8^x = 0.10$

Løs: $\left\{ x = \frac{-\ln(2) - \ln(5)}{2 \ln(2) - \ln(5)} \right\}$

2 $\{x = (-\ln(2) - \ln(5)) / (2 \ln(2) - \ln(5))\}$

$\approx \{x = 10.319\}$

Jacob må høre 11 avspillinger om sannsynligheten skal være 90 % for minst én sang med Kygo

Oppgave 2

a)

CAS	
1	A:=(3,5)
<input checked="" type="radio"/>	→ A := (3,5)
2	B:=(6,5)
<input checked="" type="radio"/>	→ B := (6,5)
3	C:=(7,9)
<input checked="" type="radio"/>	→ C := (7,9)
4	AB:=Vektor(A, B)
<input checked="" type="radio"/>	→ AB := $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
5	AC:=Vektor(A, C)
<input checked="" type="radio"/>	→ AC := $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$
6	NLøs(AB*AC=abs(AB)*abs(AC)*cos(x°))
<input type="radio"/>	≈ {x = -45, x = 45}

$$\underline{\underline{\angle BAC = 45^\circ}}$$

b)

CAS	
1	OA:=Vektor(3,5)
<input checked="" type="radio"/>	→ OA := $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
2	OB:=Vektor(6,5)
<input checked="" type="radio"/>	→ OB := $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
3	OC:=Vektor(7,9)
<input checked="" type="radio"/>	→ OC := $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$
4	(OA+OB+OC)/3
<input type="radio"/>	→ $\begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{19}{3} \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\text{Tyngdepunktet har koordinater } \begin{pmatrix} \frac{16}{3}, \frac{19}{3} \end{pmatrix}}}$$

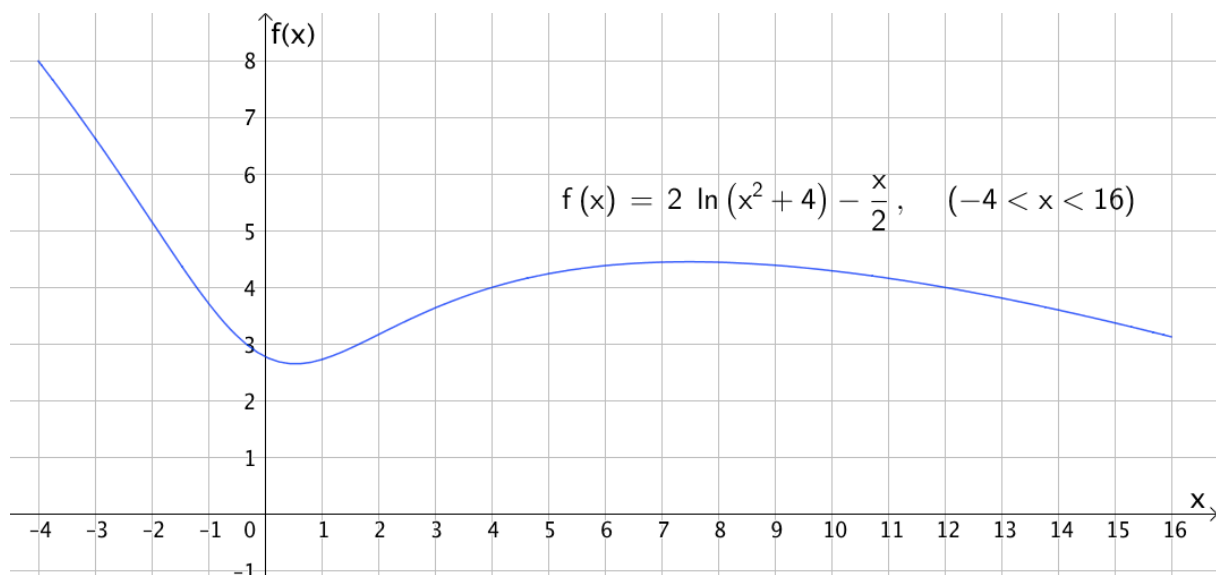
c)

CAS	
1	OD:=Vektor(2,3) → $\mathbf{OD} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
2	OE:=Vektor((-3,5)) → $\mathbf{OE} := \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$
3	OF:=Vektor((x,y)) → $\mathbf{OF} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
4	OS:=Vektor(4,2) → $\mathbf{OS} := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
5	OS=(OD+OE+OF)/3 Løs: $\{\{x = 13, y = -2\}\}$

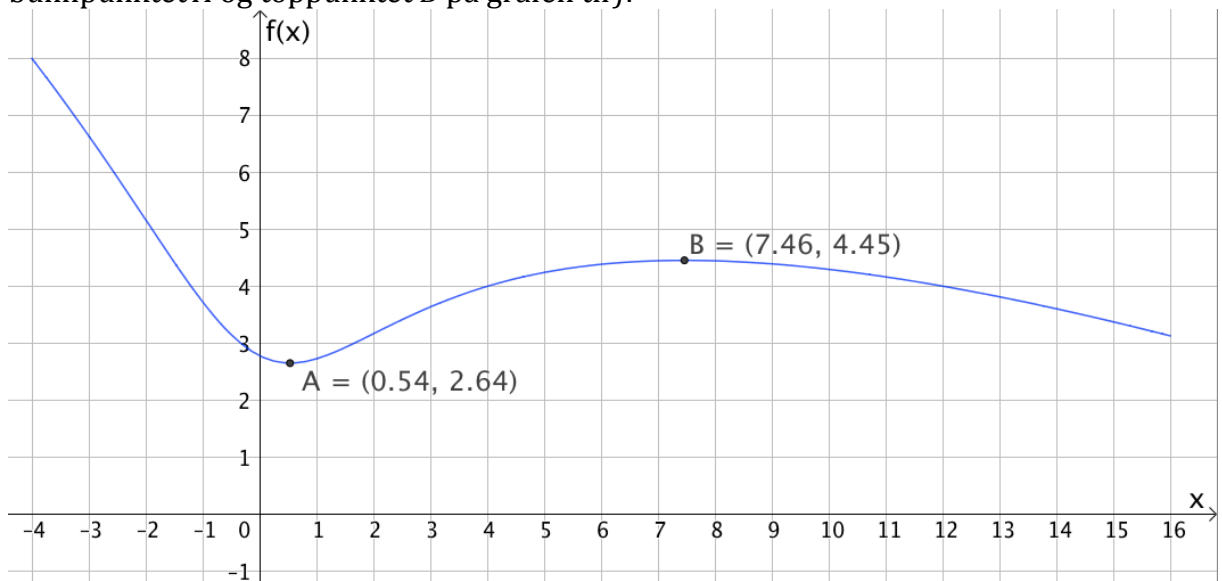
Hjørnet F har koordinater (13,-2)

Oppgave 3

a)



- b) Bruker kommandoen "Ekstremalpunkt(<Funksjon>, <Start>, <Slutt>)" og finner bunnpunktet A og toppunktet B på grafen til f.



Grafen til f har bunnpunkt (0,54, 2,64) og toppunkt (7,46, 4,45)

- c)

CAS	
	$g(x) := 2 \cdot \log(x^2 + k) - x/2$
1	$\rightarrow g(x) := 2 \ln(x^2 + k) - \frac{1}{2} x$
2	$g'(1) = 0$
	Løs: $\{k = 7\}$

g har et ekstremalpunkt i $x = 1$ når $k = 7$

- d)

CAS	
	$g(x) := 2 \cdot \log(x^2 + k) - x/2$
1	$\rightarrow g(x) := 2 \ln(x^2 + k) - \frac{1}{2} x$
2	$g'(x) = 0$
	Løs: $\left\{ x = -\sqrt{-k + 16} + 4, x = \sqrt{-k + 16} + 4 \right\}$

Grafen til g har

- ett ekstremalpunkt når $\sqrt{-k+16} = 0$
- to ekstremalpunkt når $\sqrt{-k+16} > 0$
- Ingen ekstremalpunkter når $\sqrt{-k+16} < 0$

Da har grafen til g ett ekstremalpunkt når $k = 16$, to ekstremalpunkter når $k > 16$ og ingen ekstremalpunkter når $0 < k < 16$

Oppgave 4

a)

CAS	
	OP:=Vektor(80+4t,16+3t)
1	→ $OP := \begin{pmatrix} 80 + 4t \\ 16 + 3t \end{pmatrix}$
	r(t):=OP
2	→ $r(t) := \begin{pmatrix} 4t + 80 \\ 3t + 16 \end{pmatrix}$
	v(t):=r'(t)
3	→ $v(t) := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$
	abs(v)
4	→ 5

Skipet driver med fartsvektor $\vec{v} = [4,3]$ og banefarten er 5 nm/h (altså 5 knop)

b)

CAS	
	OP:=Vektor(80+4t,16+3t)
1	→ $OP := \begin{pmatrix} 80 + 4t \\ 16 + 3t \end{pmatrix}$
	r(t):=OP
2	→ $r(t) := \begin{pmatrix} 4t + 80 \\ 3t + 16 \end{pmatrix}$
	abs(r(4))
3	→ 100

Skipet *Euler* er altså 100 nautiske mil fra O om 4 timer, så redningsbåten må holde en fart på 25 nm/h (altså 25 knop).

- c) Uansett hvilken retning redningsbåten fra Q kjører, vil den etter t timer være $35t$ nautiske mil fra utgangspunktet. Dens posisjon vi da ligge på sirkelperiferien til en sirkel med sentrum i $(-10,50)$ og radius $35t$.

Likningen for denne sirkelen er $(x+10)^2 + (y-50)^2 = (35t)^2$

Vi setter nå inn koordinatene til \overrightarrow{OP} og løser likningen med hensyn på t .

CAS	
1	Løs((80+4t+10) ² +(16+3t-50) ² =(35t) ² , t)
<input type="radio"/>	$\rightarrow \left\{ t = \frac{-7 \sqrt{57009} + 129}{600}, t = \frac{7 \sqrt{57009} + 129}{600} \right\}$
2	t > 0, så
3	t = HøyreSide(\$1,2) $\approx t = 3.001$

Redningsbåten som kjører fra Q kan være fremme hos Euler i løpet av 3 timer