Øvingsoppgaver til Abelkonkurransen, runde 1
Løsninger

Marius Stensrud

31. oktober 2017

Oppgave 1.

Løsning.

$$\begin{aligned}2017(-a)^{2017} + 100 &= -2017a^{2017} + 100 \\ &= -(2017a^{2017} + 100) + 200 \\ &= -(110) + 200 \\ &= 90.\end{aligned}$$

■

Oppgave 2.

Løsning. Likheten er ekvivalent med

$$\sqrt{4 - 2(x-1)^2} + \sqrt{9 - 3(x-1)^2} = 5 + (x-1)^2,$$

og vi ser at $x = 1$ er en løsning. Hvis vi så endrer x til noe annet enn 1 vil venstresiden synke i verdi, mens høyresiden øker. Eneste løsning er derfor $x = 1$. ■

Oppgave 3.

Løsning. Se for eksempel dette beviset. ■

Oppgave 4.

Løsning. La $a = 200 - n$, slik at likheten blir

$$n(n+3)(n+6)\cdots(n+300) = (a)(a+3)(a+6)\cdots(a+300).$$

Vi ser at n må være lik a, altså $n = 200 - n \iff n = 100$. ■

Oppgave 5.

Løsning. Fra AM-GM-ulikheten følger det at

$$\frac{x^5 + x + 1}{3} \geq \sqrt[3]{x^5 \cdot x \cdot 1},$$

som er ekvivalent med ulikheten vi skulle vise. ■

Oppgave 6.

Løsning. Siden a deler både b og c finnes det heltall m og n som er slik at $b = am$ og $c = an$. Da er

$$xb + yc = a(xm + yn),$$

så a deler også dette tallet. ■

Oppgave 7.

Løsning. Merk at

$$a^{n+2} + b^{n+2} = (a + b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n),$$

slik at

$$S_{n+2} = (a + b)S_{n+1} - abS_n = 2S_{n+1} + S_n$$

hvis vi innfører $S_n = a^n + b^n$. Siden vi vet $S_0 = S_n = 2$ kan vi enkelt regne oss oppover til $S_{10} = 6726$. ■

Oppgave 8.

Løsning.

$$x^4 - 1 = (x^2)^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

■

Oppgave 9.

Løsning. Merk at 3 alltid deler summen av tverrsummene til tre påfølgende heltall: For eksempel så er $4 + 5 + 6$ delelig med tre, og hvis vi betrakter de påfølgende heltallene $275, 276, 277$ så er også $(2 + 7 + 5) + (2 + 7 + 6) + (2 + 7 + 7)$ delelig med tre. Følgelig er tverrsummen til n delelig med 3 hvis og bare hvis tverrsummen til 100 er det, noe den helt klart ikke er. n er derfor ikke delelig på 3.

Alternativt kan vi bruke modulær aritmetikk. Hvis $T(n)$ denoterer tverrsummen til n så er $T(n) \equiv n \pmod 3$, og bruker vi dette får vi at

$$n \equiv T(n) \equiv T(1) + T(2) + \cdots + T(100) \equiv 1 + 2 + \cdots + 100 \equiv 1 \pmod 3,$$

så n er ikke delelig på 3. ■

Oppgave 10.

Løsning. (Slik jeg tolker oppgaven). Det finnes et polynom med reelle koeffisienter som har n relle røtter, og siden komplekse røtter alltid opptrer i par med sine komplekse konjugater er antall reelle røtter av et femtegradspolynom alltid odde. Et polynom av grad n har n komplekse røtter, så dette begrenser de mulige verdiene for n til $1, 3$ og 5. Men n er også en toerpotens, så $n = 1$ er eneste mulighet — og 1 er et kvadrattall, så det finnes ingen slik n. ■

Oppgave 11.

Løsning. Ulikheten er ekvivalent med

$$0 > (x - 4)(x + 3).$$

Når $-3 < x < 4$ er $x - 4 < 0$ og $x + 3 > 0$, så produktet på høyresiden over blir negativt. ■

Oppgave 12.

Løsning. Sett $y = 1$ først, noe som gir oss

$$2f(x) \leq f(x) + f(1) \implies f(x) \leq f(1) \quad \forall x.$$

Setter vi så inn $x = \frac{1}{y}$ blir likheten til

$$2f(1) \leq f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y).$$

Men siden $f(x) \leq f(1)$ for alle x så er også $f(y) \leq f(1)$ og $f\left(\frac{1}{y}\right) \leq 1$. Hvis ulikhetene er strenge vil

$$2f(1) \leq f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) < 2f(1),$$

som er en motsigelse, så $f(x) = f(1)$ for alle x. Alle løsninger er derfor på formen $f(x) = c$, hvor c er en konstant, og ved å sette dette inn i den originale likningen ser vi at c kan være hva som helst.

∎