Løsningsforslag MAT1013 Matematikk 1T Våren 2017

med forbehold om feil

26. mai 2017

Del 1

Oppgave 1

$$\frac{0{,}72 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^{-8}} = \frac{72 \cdot 10^6}{60 \cdot 10^{-8}} = \frac{72}{60} \cdot 10^{14} = \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^{14}}}$$

$$\begin{array}{l} 72 : 60 = 1{,}2 \\ \underline{60} \\ 120 \\ \underline{120} \\ \quad 0 \end{array}$$

Oppgave 2

$$4^0 + 2^{-3} \cdot \left(2^3\right)^2 = 1 + 2^{-3+3\cdot 2} = 1 + 2^3 = 1 + 8 = \underline{\underline{9}}$$

Oppgave 3

$$\sqrt{20} + \sqrt{5} - \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{5} - \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 16}{2}} = 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 4\sqrt{5} = \underline{\underline{-\sqrt{5}}}$$

Oppgave 4

Setter $y = x + 2$ inn i den første likningen.

$$\begin{aligned} x^2 + (x+2)^2 &= 4 \\ x^2 + x^2 + 4x + 4 - 4 &= 0 \\ 2x^2 + 4x &= 0 \\ 2x(x+2) &= 0 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x + 2 = 0 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x = -2 \end{aligned}$$

Likningsettet har følgende løsning:

$$\underline{\underline{x = 0 \quad \wedge \quad y = 2}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = -2 \quad \wedge \quad y = 0}}$$

Oppgave 5

$$\begin{aligned} \lg\left(x^2 + \frac{3}{4}\right) &= 0 \\ x^2 + \frac{3}{4} &= 10^0 \\ x^2 &= 1 - \frac{3}{4} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{4}} \\ x &= \underline{\underline{\pm\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

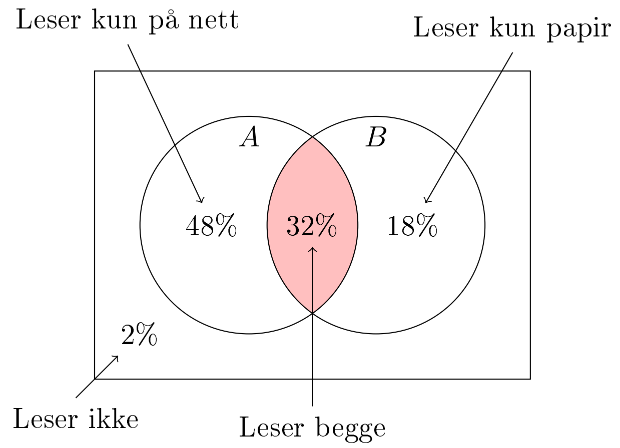
Oppgave 6

Fellesnevner er $x(x-1)$

$$\frac{1}{x} + \frac{x-5}{x-1} - \frac{2x-6}{x^2-x} = \frac{1 \cdot (x-1) + (x-5) \cdot x - (2x-6)}{x(x-1)} = \frac{x - 1 + x^2 - 5x - 2x + 6}{x(x-1)} = \frac{x^2 - 6x + 5}{x(x-1)} = \frac{\cancel{(x-1)} \cdot (x-5)}{x \cdot \cancel{(x-1)}} = \underline{\underline{\frac{x-5}{x}}}$$

Oppgave 7

a) Venndiagram:



Krysstabell:

	A	ikke A	sum
B	32%	18%	50%
ikke B	48%	2%	50%
sum	80%	20%	100%

b) Leser svaret rett av tabellen:

$$\underline{\underline{P(A\cap B) = 32\%}}$$

c)

$$P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{B}\cap A)}{P(A)} = \frac{48\%}{80\%} = \frac{6}{10} = \underline{\underline{60\%}}$$

Oppgave 8

Kaller den lengste siden x. Da blir den nest lengste siden $x-2$. Den lengste siden er hypotenus i trekanten. Bruker pytagorassetningen for å finne x:

$$\begin{aligned} x^2 &= (x-2)^2 + 20^2 \\ x^2 &= x^2 - 4x + 4 + 400 \\ x^2 - x^2 + 4x &= 404 \\ x &= 101 \end{aligned}$$

<u>Den lengste siden er 101.</u>

Oppgave 9

a) Gjennomsnittlig vekst er gitt ved

$$\bar{a} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)} = \frac{-3-\left((-2)^3+3(-2)^2-2(-2)-3\right)}{2} = \frac{-3+8-12-4+3}{2} = \underline{\underline{-4}}$$

b) Momentan vekstfart er gitt ved $a = f'(-2)$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$$

$$f'(-2) = 3(-2)^2 + 6(-2) - 2 = 12 - 12 - 2 = \underline{\underline{-2}}$$

Oppgave 10

a) Leser av på grafen hvor grafen ligger over x-aksen.

$$\underline{\underline{f(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \in \langle 4, \rightarrow\rangle}}$$

b) Leser av på grafen hvor grafen vokser:

$$\underline{\underline{f'(x) > 0 \quad \text{for} \quad x \in \langle \leftarrow, 1\rangle \cup \langle 3, \rightarrow\rangle}}$$

Oppgave 11

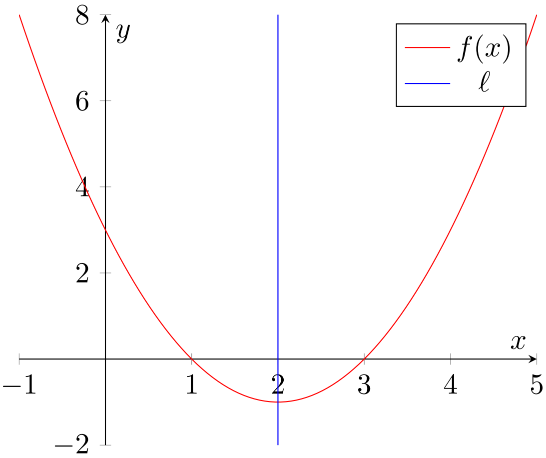
a)

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 3}}{2} \\ x &= \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} = 2 \pm 1 \\ x = 1 \quad &\vee \quad x = 3 \end{aligned}$$

<u>f har nullpunktene $x = 1$ og $x = 3$.</u>

b) Linjen ℓ er vertikal og går gjennom bunnpunktet til f, lager en verditabell for å tegne grafen til f:

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	8	3	0	-1	0	3	8

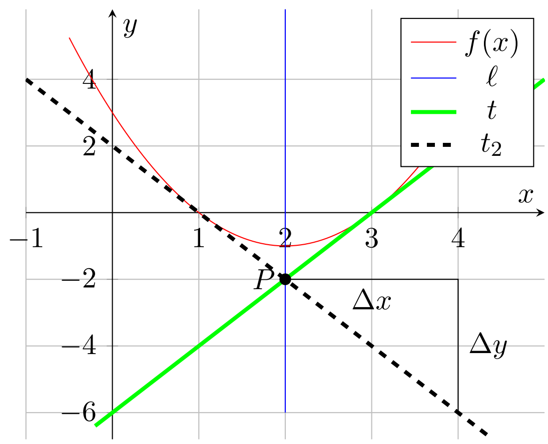


c) For å finne når f har stigningstall 2 løser vi likningen $f'(x) = 2$:

$$2x - 4 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 3}}$$

Videre har vi at $f(3) = 0$, bruker så ettpunktsformelen for å finne liknigen til tangenten t:

$$y - 0 = 2(x-3) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{y = 2x - 6}}$$



d) Tangenten t_2 er skissert i figuren over. Leser av konstantleddet $b = 2$ og stigningstallet $a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-4}{2} = -2$. Likningen blir da:

$$\underline{\underline{y = -2x + 2}}$$

e) Finner først $f'(x) = 2x - 4$. Så beregner vi koordinatene til P. P ligger på ℓ, så x-koordinaten finner vi ved å løse $f'(x) = 0$.

$$2x - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}}$$

y-koordinaten kan vi finne ved å sette $x = 2$ inn i likningen til t:

$$y = 2\cdot 2 - 6 = -2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{P = (2, -2)}}$$

Videre ser vi at t_2 skjærer gjennom P fordi $y = -2 \cdot 2 + 2 = -2$. Nullpunktet til t_2 er $x = 1$, dette er ett av nullpunktene til f. (Se oppgave a)). Det betyr at t_2 ligger på f Til slutt sjekker vi at stigningstallet til f i dette punktet er -2:

$$f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$$

Da har vi vist at $y = -2x + 2$ er en tangent til f som går gjennom punktet P.

Oppgave 12

a) Finner først PQ ved hjelp av pytagoras:

$$\begin{aligned} PQ^2 + 1^2 &= 2^2 \\ PQ^2 &= 4 - 1 \\ PQ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\text{hosliggende katet}}{\text{hypotenus}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hosliggende katet}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Bruker arealsetningen:

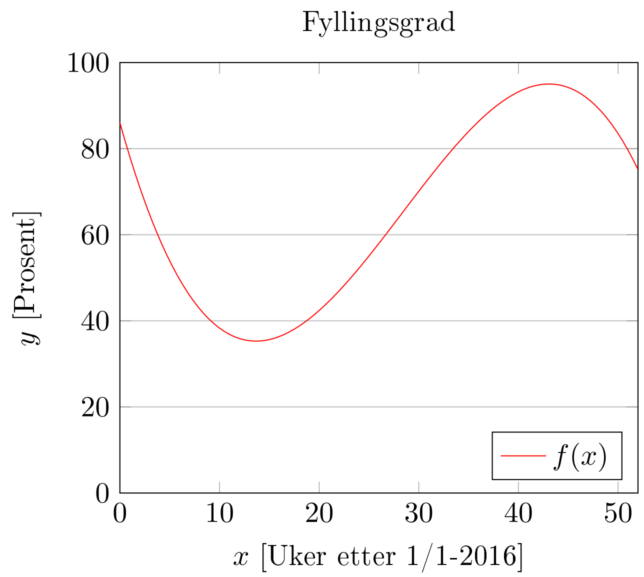
$$\begin{aligned} T_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A = \\ &\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{2}} \end{aligned}$$

c) Benytter cosinussetningen:

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A \\ BC^2 &= 4^2 + 2^2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \cos 30^\circ \\ BC^2 &= 16 + 4 - 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ BC^2 &= 20 - 8\sqrt{3} = 4(5 - 2\sqrt{3}) \\ BC &= \underline{\underline{2\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}} \end{aligned}$$

Del 2

Oppgave 1



a)

b) Løser ulikheten $f(x) > 60$ i CAS og ser at

$$f(x) > 60 \quad \text{for} \quad x \in [0, 3{,}8\rangle \cup \langle 26{,}7, 52]$$

Dette blir tilsammen ca. 29 uker. <u>Fyllingsgraden var over 60% i omtrent 29 uker.</u>

1	f(x):=-0.0047x³+0.40x²-8.3x+86
	$\approx$ $f(x) := -0.0047\,x^3 + 0.4\,x^2 - 8.3\,x + 86$
2	Løs[f>60]
	$\rightarrow$ $\{x < 3.796, 26.6716 < x < 54.6388\}$

c) Bruker CAS, og får bunnpunkt $(13{,}7, 35{,}3)$. <u>Det betyr at fyllingsgraden var lavest i uke 14, da var den 35,3% på det laveste.</u>

3	Ekstremalpunkt[f, 10, 20]
	$\rightarrow$ $(13.6672, 35.2804)$

d) Bruker CAS til å bestemme likningen:

$$\underline{y = 2{,}5x - 7{,}5}$$

Stigningstallet til tangenten forteller hvor fort fyllingsgraden endret seg på dette tidspunktet. <u>I overgangen fra uke 22 til 23 økte fyllingsgraden til magasinet med 2,5 prosentpoeng pr. uke.</u>

4	Tangent[22, f]
	$\approx$ $y = 2.4756\,x - 7.5088$

Oppgave 2

Bruker CAS. <u>Voksenbillett koster 128 kr, og barnebillett koster 88 kr.</u>

1	2 voksen + 3 barn = 520 → $3\ \mathrm{barn} + 2\ \mathrm{voksen} = 520$
2	barn + 40 = voksen → $\mathrm{barn} + 40 = \mathrm{voksen}$
3	{$1, $2} Løs: $\{\{\mathrm{barn} = 88, \mathrm{voksen} = 128\}\}$

Oppgave 3

a) Bruker start og slutt til å lese av konstantledd og stigningstall. $b = 30$, $a = \frac{14-30}{17-0} \approx -0{,}94$. Da får vi en modell

$$\underline{\underline{R(x) = -0{,}94x + 30}}$$

b) Løser likningen $R(x) = 5$ i CAS og ser at andelen røykere vil ifølge modellen være 5% i august 2026.

7	Løs[-0.94x+30=5] ≈ $\{x = 26.6\}$

August fordi $0{,}6 \cdot 12 = 7{,}2$, noe som betyr at vi er inne i den åttende måneden.

Oppgave 4

Definerer to hendinger:

H : Kartongen er helmelk
L : Korken er lekk

Ut fra oppgaveteksten har vi følgende: $P(H) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$, $P(\overline{H}) = \frac{2}{3}$, $P(L|H) = \frac{1}{4}$ og $P(L|\overline{H}) = \frac{2}{5}$.

a) Bruker total sannsynlighet:

$$P(L) = P(H) \cdot P(L|H) + P(\overline{H}) \cdot P(L|\overline{H})$$
$$P(L) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{7}{20}}} = \underline{\underline{0{,}35}}$$

b) Bayes' setning:

$$P(\overline{H}|L) = \frac{P(\overline{H}) \cdot P(L|\overline{H})}{P(L)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{7}{20}} = \underline{\underline{\frac{16}{21}}} \approx \underline{\underline{0{,}76}}$$

Oppgave 5

Bruker cosinussetningen og løser i CAS.

$$\underline{\underline{s = \frac{8}{3}}}$$

1	(7s)²=(5s)²+(3s²)²-2*5s*3s²*cos(60°) Løs: $\left\{s = -1, s = 0, s = \frac{8}{3}\right\}$

Oppgave 6

Ser at både $f(a) = 0$ og $f'(a) = 0$ som betyr at funksjonen både har nullpunkt og stasjonert punkt i $P(a, f(a))$. Videre ser vi at $f''(a) > 0$ som betyr at det stasjonære punktet er et bunnpunkt.

1	f(x):=x³-2 a x²+a² x → $f(x) := x^3 - 2\,a\,x^2 + a^2\,x$
2	f(a) RegnUt: 0
3	f'(a) RegnUt: 0
4	f''(a) RegnUt: $2\,a$
5	Faktoriser[f'(x)] → $(x - a)\ (3\,x - a)$

Dersom man ikke kjenner til andrederiverttesten kan man se på faktorene til $f'(x)$. $x - a$ er null i $x = a$, og er strengt voksende. Den går dermed fra negativ til positiv, mens $3x - a$ er positiv for $x = a$. $f'(x)$ bytter dermed fortegn fra minus til pluss og punktet er et bunnpunkt.

Oppgave 7

a) Ser at $AB = R$, $AC = 2R - r$ og $BC = R + r$. Løser $BC^2 = AB^2 + AC^2$ i CAS.

b)

$$\underline{\underline{A = \frac{5}{18}\pi R^2}}$$

Løs[(R + r)² = R² + (2R - r)²,r]   → $\left\{r = \frac{2}{3}\,R\right\}$
1/4* π *(2R)²-1/2* π *R²-1/2* π *(2/3*R)²   → $\frac{5}{18}\,R^2\,\pi$