

Løsningsforslag eksamen R1 våren 2017

NB! Mange av oppgavene kan løses på ulike måter, så andre fremgangsmåter enn de som er valgt her, kan være akkurat like gode – så lenge man kommer frem til riktig løsning. Unntaket er oppgaver hvor oppgaveteksten krever én spesiell fremgangsmåte og/eller bruk av digitale hjelpemidler.

Del 1

Oppgave 1

a)

$$f(x) = 2x^3 - 5x + 4$$

$$f'(x) = \underline{\underline{6x^2 - 5}}$$

b)

$$g(x) = x^2 e^x$$

$$g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \underline{\underline{x(2+x)e^x}}$$

c)

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 3}}(2x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}}}}$$

Oppgave 2

a)

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 3}{x^2 - 9} + \frac{1}{x + 3} + \frac{5}{x - 3} &= \frac{x^2 - 3}{(x + 3)(x - 3)} + \frac{1(x - 3)}{(x + 3)(x - 3)} + \frac{5(x + 3)}{(x + 3)(x - 3)} \\ &= \frac{x^2 - 3 + x - 3 + 5x + 15}{(x + 3)(x - 3)} \\ &= \frac{x^2 + 6x + 9}{(x + 3)(x - 3)} \\ &= \frac{(x + 3)^2}{(x + 3)(x - 3)} \\ &= \underline{\underline{\frac{x + 3}{x - 3}}} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}2\ln(a^{-3}b^2) - 3\ln\left(\frac{b}{a^2}\right) &= \ln(a^{-3}b^2)^2 - \ln\left(\frac{b}{a^2}\right)^3 \\&= \ln(a^{-6}b^4) - \ln\left(\frac{b^3}{a^6}\right) \\&= \ln a^{-6} + \ln b^4 - (\ln b^3 - \ln a^6) \\&= -6\ln a + 4\ln b - 3\ln b + 6\ln a \\&= \underline{\underline{\ln b}}\end{aligned}$$

Oppgave 3

a)

$$\overrightarrow{AB} = [2 - (-1), 1 - 6] = \underline{\underline{[3, -5]}} \quad \text{og} \quad \overrightarrow{AC} = [4 - (-1), 4 - 6] = \underline{\underline{[5, -2]}}$$

b)

$$\begin{aligned}\text{Må ha } \overrightarrow{CD} &= -\overrightarrow{AB} = [-3, 5] \\ \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = [4, 4] + [-3, 5] = [1, 9]\end{aligned}$$

Punktet D har koordinatene (1,9)

Oppgave 4

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$$

a)

$$P'(x) = 6x^2 - 12x - 2$$

$$P''(x) = 12x - 12$$

$$P(1) = 12 \cdot 1 - 12 = 0$$

Ser at $x = 1$ er nullpunktet til den andrederiverte.

Siden grafen til den andrederiverte er ei rett linje, vil den skifte fortegn i nullpunktet.

Da vet vi at (1,0) er et vendepunkt på grafen til P , Som skulle grunngis

b)

Siden (1,0) ligger på grafen til P (vendepunktet), vet vi at $(x - 1)$ er faktor i $P(x)$.

Faktoriserer ut 2 før jeg gjennomfører polynomdivisjonen.

$$P(x) = 2(x^3 - 3x^2 - x + 3)$$

Gjennomfører polynomdivisjon:

$$(x^3 - 3x^2 - x + 3) : (x - 1) = x^2 - 2x - 3$$

$$\begin{array}{r} \underline{x^3 - x^2} \\ -2x^2 - x + 3 \\ \underline{-2x^2 + 2x} \\ -3x + 3 \\ \underline{-3x + 3} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

gir

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2$$

$$x_1 = 3 \wedge x_2 = -1$$

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$$

så

$$\underline{\underline{P(x) = 2(x - 3)(x - 1)(x + 1)}}$$

c)

$$u = e^x$$

gir

$$2e^{3x} - 6e^{2x} - 2e^x + 6 = 2u^3 - 6u^2 - 2u + 6$$

Bruker faktoriseringen fra forrige deloppgave:

$$2u^3 - 6u^2 - 2u + 6 = 0$$

gir

$$2(u - 3)(u - 1)(u + 1) = 0$$

så

$$e^x = 3 \vee e^x = 1 \vee e^x = -1$$

Siden $e^x > 0$, forkastes løsningen $e^x = -1$.

$$e^x = 3 \vee e^x = 1$$

gir

$$\underline{\underline{x = \ln 3 \vee x = \ln 1 = 0}}$$

Oppgave 5

a)

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = [6, 2] + \frac{1}{2}[3 - 6, 5 - 2] = [6, 2] + \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] = \left[\frac{12}{2}, \frac{4}{2}\right] + \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = [1, 0] + \frac{1}{2}[3 - 1, 5 - 0] = [1, 0] + \left[1, \frac{5}{2}\right] = \left[2, \frac{5}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = [1, 0] + \frac{1}{2}[6 - 1, 2 - 0] = [1, 0] + \left[\frac{5}{2}, 1\right] = \left[\frac{7}{2}, 1\right]$$

Har funnet posisjonsvektorene til punktene D , E og F , som forteller at punktene har følgende koordinater

$$D\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right), \quad E\left(2, \frac{5}{2}\right) \quad \text{og} \quad F\left(\frac{7}{2}, 1\right), \text{ som skulle forklares}$$

b)

Siden $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AT}$, kan vi si $\overrightarrow{AT} = s \cdot \overrightarrow{AD}$, der s er et reelt tall.

$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$, men siden $\overrightarrow{BT} \parallel \overrightarrow{BE}$, kan vi si $\overrightarrow{BT} = t \cdot \overrightarrow{BE}$, som gir $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{BE}$, der t er et reelt tall

Som skulle forklares

c) Siden skjæringspunktet mellom medianene i trekanten deler hver median i to deler i forholdet 2:1 fra hjørnene, vet jeg at $s = t = \frac{2}{3}$.

Men oppgaven sier jeg skal bruke likningene til å vise dette, så da gjør jeg det.

$$\overrightarrow{AT} = s \cdot \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AT} = s \cdot \left[\frac{9}{2} - 1, \frac{7}{2} - 0\right] = s \cdot \left[\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right] = \left[\frac{7}{2}s, \frac{7}{2}s\right]$$

og

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{BE} = [5, 2] + t \cdot \left[2 - 6, \frac{5}{2} - 2\right] = [5, 2] + t \cdot \left[-4, \frac{1}{2}\right] = \left[5 - 4t, 2 + \frac{1}{2}t\right]$$

Har nå to likninger:

$$\frac{7}{2}s = 5 - 4t \wedge \frac{7}{2}s = 2 + \frac{1}{2}t$$

Trekker den ene likningen fra den andre og får

$$\frac{7}{2}s - \frac{7}{2}s = 5 - 4t - \left(2 + \frac{1}{2}t\right) \Rightarrow 5 - 4t - 2 - \frac{1}{2}t = 0$$

løser likningen og finner t :

$$3 - \frac{9}{2}t = 0$$

$$\frac{9}{2}t = 3$$

$$9t = 6$$

$$t = \frac{6}{9}$$

$$t = \frac{2}{3}$$

Setter inn for t i den ene likningen

$$\frac{7}{2}s = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\frac{7}{2}s = 2 + \frac{2}{6}$$

$$s = \frac{14}{6} \cdot \frac{2}{7}$$

$$s = 2 \cdot \frac{1}{3}$$

$$s = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} = [1, 0] + \frac{2}{3}\left[\frac{9}{2} - 1, \frac{7}{2} - 0\right] = [1, 0] + \left[\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right] = \left[\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right]$$

$$\underline{\underline{s = t = \frac{2}{3} \text{ og } T \text{ har koordinater } \left(\frac{10}{3}, \frac{7}{3}\right)}}$$

Oppgave 6

a)

Bruker total sannsynlighet:

$$0,08 \cdot 0,92 + 0,92 \cdot 0,02 = 0,92(0,08 + 0,02) = 0,92 \cdot 0,1 = 0,092 = 9,2\%$$

som skulle vises

b)

$$\frac{0,08 \cdot 0,92}{0,092} = 0,08 \cdot \frac{92}{9,2} = 0,08 \cdot 10 = 0,8 = 80\%$$

Sannsynligheten for at en defekt lyspære blir forkastet, er 80 %

Oppgave 7

a)

Siden SF og SD er radius i sirkelen, vet vi at disse er like lange. Ser også at alle vinklene i firkant $CDSF$ er 90° . Det betyr at firkanten $CDSF$ er et kvadrat.

Da har vi at $FC = SF = r$ og at $DC = SD = r$.

Dette gir $a = BF + FC = BF + r$ og $b = AD + DC = AD + r$, som skulle forklares

b)

AS deler $\angle A$ i to like store deler og både trekant ASD og ASE er rettvinklede, kan vi si at disse trekantene er formlike. I tillegg er korteste katet lik r i begge trekantene, så de er faktisk kongruente (altså formlike og like store). Det betyr at $AE = AD$.

Samme argumentasjonen kan brukes om trekantene BSE og BSF , men med utgangspunkt i at BS deler $\angle B$ i to like store deler, så vi kan si at $BE = BF$

Vi kan da si at $c = AE + BE = AD + BF$

$$a + b - c = 2r + BF + AD - (AD + BF) = 2r + BF + AD - AD - BF = 2r,$$

som skulle vises

c)

$a \perp b$, så vi kan se på a som grunnlinje og b som høyde. Da har vi $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

Vi kan dele trekanten inn i tre trekanter med grunnlinjer a , b og c . Høyden i alle disse trekantene vil være r .

$$\text{Da har vi } T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$$

Vi kan altså skrive arealet på to måter: $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ og $T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$,

som skulle vises

d)

Setter de to ulike uttrykkene for arealet lik hverandre:

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$$

$$a \cdot b = r \cdot (a + b + c)$$

Bruker resultat fra b) og skriver $a + b - c = 2r \Rightarrow r = \frac{a + b - c}{2}$, som settes inn for r

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(a + b - c)(a + b + c)$$

$$2 \cdot a \cdot b = (a + b - c)(a + b + c)$$

$$2 \cdot a \cdot b = a^2 + ab + ac + ab + b^2 + bc - ac - bc - c^2$$

$$2 \cdot a \cdot b = a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$a^2 + 2ab - 2ab + b^2 = c^2$$

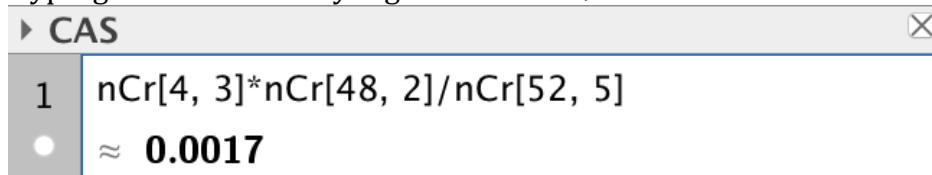
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Som skulle vises

Del 2

Oppgave 1

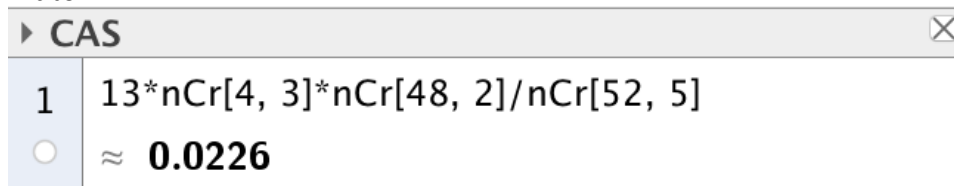
a) Hypergeometrisk sannsynlighetsmodell. Løser i CAS:



CAS window showing the calculation of a hypergeometric probability. The input is $nCr[4, 3] \cdot nCr[48, 2] / nCr[52, 5]$ and the result is approximately 0.0017.

Sannsynligheten for å trekke nøyaktig tre tiere er 0,17 %

b) Siden det er 13 ulike verdier, kan hendelsen tre kort med samme verdi skje på 13 måter.



CAS window showing the calculation of a hypergeometric probability. The input is $13 \cdot nCr[4, 3] \cdot nCr[48, 2] / nCr[52, 5]$ and the result is approximately 0.0226.

Sannsynligheten for å trekke tre kort med samme verdi er 2,26 %

c) Hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.

Kan skje på fire måter, nemlig 5 hjerter, 5 kløver, 5 spar eller fem ruter.

```

CAS
1 4*nCr[13, 5]*nCr[39, 0]/nCr[52, 5]
  ≈ 0.002

```

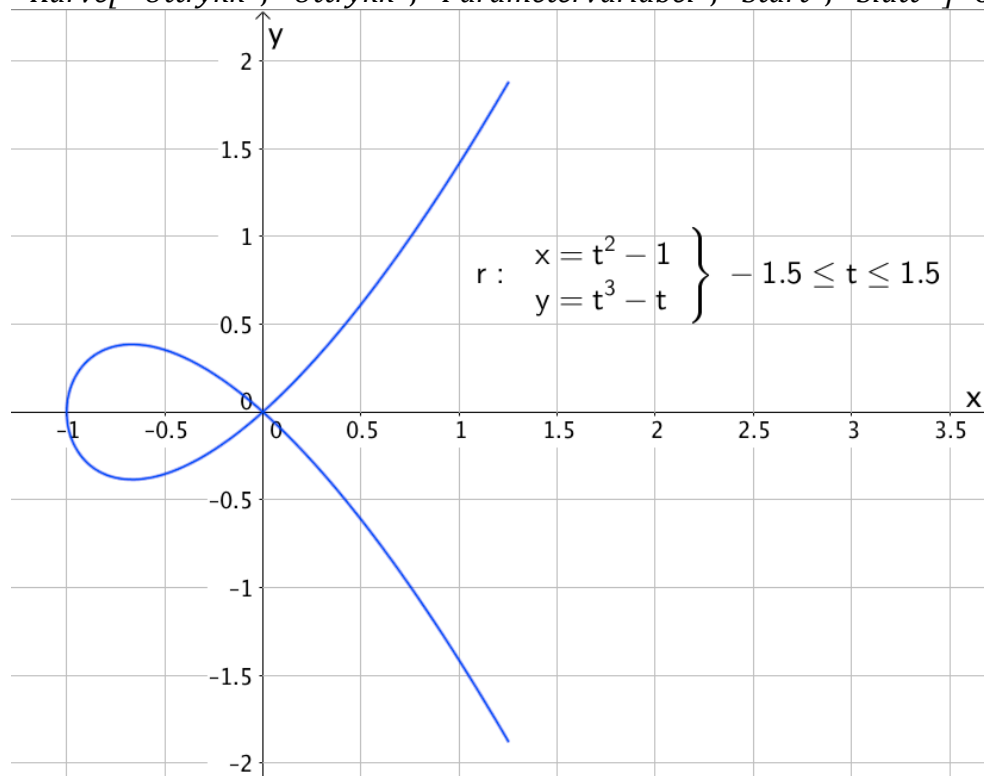
Sannsynligheten for å trekke fem kort i samme kortfarge er 0,2 %

Oppgave 2

a)

Bruker kommandoen

"Kurve[<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>]" og tegner grafen.



b) Bruker CAS

```

CAS
1 r(t):=Vektor[(t^2-1,t^3-t)]
  → r(t) := ( t^2 - 1 )
              ( t^3 - t )

2 v(t):=r'(t)
  → v(t) := ( 2 t )
              ( 3 t^2 - 1 )

3 a(t):=v'(t)
  → a(t) := ( 2 )
              ( 6 t )

```


Fartsvektoren er $\vec{v}(t) = [2t, 3t^2 - 1]$ og akselerasjonsvektoren er $\vec{a}(t) = [2, 6t]$

c)

Definerer funksjonen $h(t)$, der $h(t)$ er lengden til fartsvektoren avhengig av t .

CAS	
1	$r(t) := \text{Vektor}[(t^2 - 1, t^3 - t)];$
2	$v(t) := r'(t);$
3	$h(t) := \text{abs}(v)$
•	$\rightarrow h(t) := \sqrt{9t^4 - 2t^2 + 1}$
4	Ekstremalpunkt[h] $\rightarrow \left\{ \left(-\frac{1}{3}, 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \right), (0, 1), \left(\frac{1}{3}, 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \right\}$
5	$\{((-1) / 3, 2\text{sqrt}(2) / 3), (0, 1), (1 / 3, 2\text{sqrt}(2) / 3)\}$ $\approx \{(-0.33, 0.94), (0, 1), (0.33, 0.94)\}$

Den minste banefarten til partikkelen er $\frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0,94$

Oppgave 3

a)

Kan uttrykke arealet av trekant ABC på to måter.

$$A = \frac{1}{2} x \cdot BC = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{7^2 - x^2}$$

og

$$A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot d$$

Setter uttrykkene lik hverandre og løser med hensyn på d

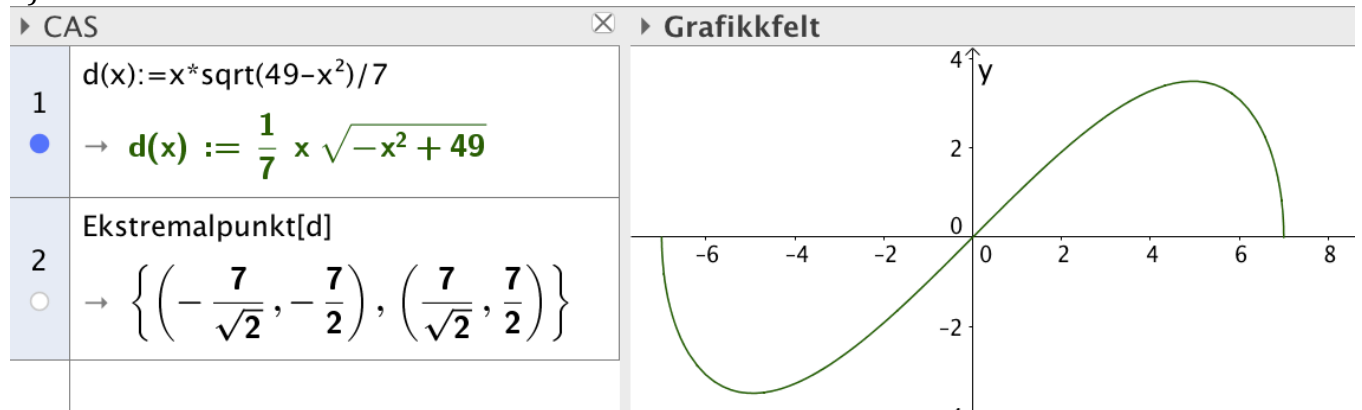
$$\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot d = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{7^2 - x^2}$$

$$7d = x \cdot \sqrt{49 - x^2}$$

$$d = \frac{x \cdot \sqrt{49 - x^2}}{7}$$

Som skulle vises

b)

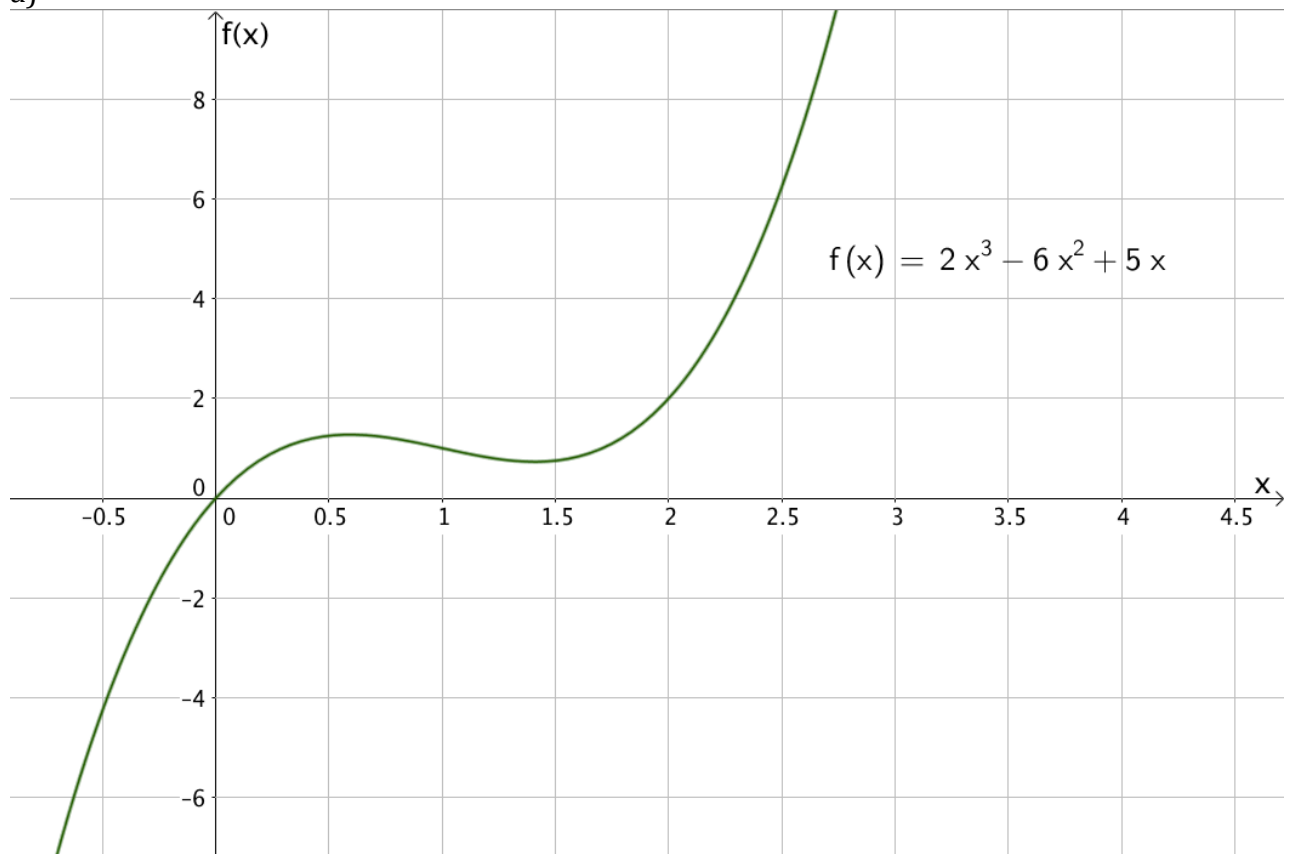


Må ha $x > 0$, så kun det ene ekstremalpunktet som er aktuelt. Ser av grafen at det er snakk om toppunkt.

d blir lengst mulig når $x = \frac{7}{\sqrt{2}} \approx 4,95$. Da har vi $d = \frac{7}{2} = 3,5$

Oppgave 4

a)



b)

$f'(x)$ gir oss stigningstallet til tangenten. Når vi vet at tangeringspunktet har koordinater $(x, f(x))$ og at tangenten også går gjennom $A(4, 3)$, kan vi uttrykke

stigningstallet slik: $\frac{f(x) - 3}{x - 4}$

Da har vi $\frac{f(x) - 3}{x - 4} = f'(x)$, som skulle forklares

c)

CAS	
1	$f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 5x$
<input checked="" type="radio"/>	$\rightarrow f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 5x$
2	$(f(x) - 3)/(x - 4) = f'(x)$
<input type="radio"/>	Løs: $\left\{ x = \frac{1}{2}, x = \frac{-\sqrt{15} + 7}{2}, x = \frac{\sqrt{15} + 7}{2} \right\}$
3	Tangent[(1/2, f(1/2)), f]
<input type="radio"/>	$\rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$
4	Tangent[((-sqrt(15)+7)/2, f(-sqrt(15)+7)/2), f]
<input type="radio"/>	$\rightarrow y = (-15\sqrt{15} + 59)x + 60\sqrt{15} - 233$
5	Tangent[((sqrt(15)+7)/2, f((sqrt(15)+7)/2)), f]
<input type="radio"/>	$\rightarrow y = (15\sqrt{15} + 59)x - 60\sqrt{15} - 233$

Løsningene av likningen står i rad 2 i bildet over. Likningene til de tre tangentene står i rad 3, 4 og 5 i bildet over.

d)

Bytter ut $(4,3)$ med (a,b)

$$\frac{f(x)-b}{x-a} = f'(x)$$

$$\frac{f(x)-b}{x-a} - f'(x) = 0$$

$$f(x) - b - f'(x) \cdot (x - a) = 0$$

CAS gir at dette er

CAS	
1	$f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 5x$
	$\rightarrow f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 5x$
2	$f(x) - b - f'(x) \cdot (x - a) = 0$
	RegnUt: $6ax^2 - 12ax + 5a - b - 4x^3 + 6x^2 = 0$

"rydder litt" og får følgende likning

$$4x^3 - (6a + 6)x^2 - 12ax - 5a + b = 0$$

Dette er en tredjegradslikning som har maksimalt tre løsninger.

Det maksimale antallet tangenter grafen til f kan ha, som går gjennom P , er 3

NB! Her er det egentlig tilstrekkelig å argumentere for at likningen

$f(x) - b - f'(x) \cdot (x - a) = 0$ er en tredjegradslikning og at det dermed maksimalt finnes tre løsninger. Vi kan se at vi får en tredjegradslikning uten å gjennomføre trinnene som er vist i CAS siden $f(x)$ er et tredjegradsuttrykk og at $f'(x)$ er et andregradsuttrykk, som multipliseres med en lineær faktor, slik at produktet vil bli et tredjegradsuttrykk.