Løsningsforslag eksamen R1 våren 2017

NB! Mange av oppgavene kan løses på ulike måter, så andre fremgangsmåter enn de som er valgt her, kan være akkurat like gode – så lenge man kommer frem til riktig løsning. Unntaket er oppgaver hvor oppgaveteksten krever én spesiell fremgangsmåte og/eller bruk av digitale hjelpemidler.

Del 1

Oppgave 1

a)

$$f(x) = 2x^3 - 5x + 4$$

$$f'(x) = \underline{\underline{6x^2 - 5}}$$

b)

$$g(x) = x^2 e^x$$

$$g'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \underline{\underline{x\left(2+x\right)e^x}}$$

c)

$$h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-3}}\left(2x\right) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-3}} = \underline{\underline{\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}}}$$

Oppgave 2

a)

$$\frac{x^2-3}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} + \frac{5}{x-3} = \frac{x^2-3}{(x+3)(x-3)} + \frac{1(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{5(x+3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 - 3 + x - 3 + 5x + 15}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 + 6x + 9}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x+3}{x-3}}}$$

b)

$$
\begin{aligned}
2\ln\left(a^{-3}b^{2}\right)-3\ln\left(\frac{b}{a^{2}}\right) &= \ln\left(a^{-3}b^{2}\right)^{2}-\ln\left(\frac{b}{a^{2}}\right)^{3} \\
&= \ln\left(a^{-6}b^{4}\right)-\ln\left(\frac{b^{3}}{a^{6}}\right) \\
&= \ln a^{-6}+\ln b^{4}-\left(\ln b^{3}-\ln a^{6}\right) \\
&= -6\ln a+4\ln b-3\ln b+6\ln a \\
&\underline{\underline{= \ln b}}
\end{aligned}
$$

Oppgave 3

a)

$\overrightarrow{AB}=\left[2-(-1),1-6\right]=\underline{\underline{\left[3,-5\right]}}$ og $\overrightarrow{AC}=\left[4-(-1),4-6\right]=\underline{\underline{\left[5,-2\right]}}$

b)

Må ha $\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{AB}=\left[-3,5\right]$

$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CD}=\left[4,4\right]+\left[-3,5\right]=\left[1,9\right]$

$\underline{\underline{\text{Punktet D har koordinatene } (1,9)}}$

Oppgave 4

$P(x)=2x^{3}-6x^{2}-2x+6$

a)

$P'(x)=6x^{2}-12x-2$

$P''(x)=12x-12$

$P(1)=12\cdot 1-12=0$

Ser at $x=1$ er nullpunktet til den andrederiverte.
Siden grafen til den andrederiverte er ei rett linje, vil den skifte fortegn i nullpunktet.

Da vet vi at (1,0) er et vendepunkt på grafen til *P*, <u>Som skulle grunngis</u>

b)

Siden (1,0) ligger på grafen til *P* (vendepunktet), vet vi at $(x-1)$ er faktor i $P(x)$.
Faktoriserer ut 2 før jeg gjennomfører polynomdivisjonen.

$P(x)=2\left(x^{3}-3x^{2}-x+3\right)$

Gjennomfører polynomdivisjon:

$$\left(x^3-3x^2-x+3\right):\left(x-1\right)=x^2-2x-3$$
$$\underline{x^3-x^2}$$
$$-2x^2-x+3$$
$$\underline{-2x^2+2x}$$
$$-3x+3$$
$$\underline{-3x+3}$$
$$0$$

$$x^2-2x-3=0$$
$$gir$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=1\pm 2$$
$$x_1=3\wedge x_2=-1$$
$$x^2-2x-3=\left(x-3\right)\left(x+1\right)$$
$$så$$
$$\underline{\underline{P\left(x\right)=2\left(x-3\right)\left(x-1\right)\left(x+1\right)}}$$

c)
$$u=e^x$$
$$gir$$
$$2e^{3x}-6e^{2x}-2e^x+6=2u^3-6u^2-2u+6$$

Bruker faktoriseringen fra forrige deloppgave:
$$2u^3-6u^2-2u+6=0$$
$$gir$$
$$2\left(u-3\right)\left(u-1\right)\left(u+1\right)=0$$
$$så$$
$$e^x=3\vee e^x=1\vee e^x=-1$$

Siden $e^x>0$, forkastes løsningen $e^x=-1$.

$$e^x=3\vee e^x=1$$
$$gir$$
$$\underline{\underline{x=\ln 3\vee x=\ln 1=0}}$$

Oppgave 5

a)

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = [6,2] + \frac{1}{2}[3-6, 5-2] = [6,2] + \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] = \left[\frac{12}{2}, \frac{4}{2}\right] + \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] = \left[\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = [1,0] + \frac{1}{2}[3-1, 5-0] = [1,0] + \left[1, \frac{5}{2}\right] = \left[2, \frac{5}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = [1,0] + \frac{1}{2}[6-1, 2-0] = [1,0] + \left[\frac{5}{2}, 1\right] = \left[\frac{7}{2}, 1\right]$$

Har funnet posisjonsvektorene til punktene *D, E* og *F*, som forteller at punktene har følgende koordinater

$D\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $E\left(2, \frac{5}{2}\right)$ og $F\left(\frac{7}{2}, 1\right)$, <u>som skulle forklares</u>

b)

Siden $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{AT}$, kan vi si $\overrightarrow{AT} = s \cdot \overrightarrow{AD}$, der s er et reelt tall.

$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT}$, men siden $\overrightarrow{BT} \parallel \overrightarrow{BE}$, kan vi si $\overrightarrow{BT} = t \cdot \overrightarrow{BE}$,
som gir $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{BE}$, der t er et reelt tall

<u>Som skulle forklares</u>

c) Siden skjæringspunktet mellom medianene i trekanten deler hver median i to deler i forholdet 2:1 fra hjørnene, vet jeg at $s = t = \frac{2}{3}$.
Men oppgaven sier jeg skal bruke likningene til å vise dette, så da gjør jeg det.

$$\overrightarrow{AT} = s \cdot \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AT} = s \cdot \left[\frac{9}{2} - 1, \frac{7}{2} - 0\right] = s \cdot \left[\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right] = \left[\frac{7}{2}s, \frac{7}{2}s\right]$$

og

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{BE} = [5,2] + t \cdot \left[2-6, \frac{5}{2} - 2\right] = [5,2] + t \cdot \left[-4, \frac{1}{2}\right] = \left[5 - 4t, 2 + \frac{1}{2}t\right]$$

Har nå to likninger:

$$\frac{7}{2}s = 5 - 4t \wedge \frac{7}{2}s = 2 + \frac{1}{2}t$$

Trekker den ene likningen fra den andre og får

$$\frac{7}{2}s-\frac{7}{2}s=5-4t-\left(2+\frac{1}{2}t\right)\Rightarrow 5-4t-2-\frac{1}{2}t=0$$

løser likningen og finner *t*:

$$3-\frac{9}{2}t=0$$
$$\frac{9}{2}t=3$$
$$9t=6$$
$$t=\frac{6}{9}$$
$$t=\frac{2}{3}$$

Setter inn for *t* i den ene likningen

$$\frac{7}{2}s=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$
$$\frac{7}{2}s=2+\frac{2}{6}$$
$$s=\frac{14}{6}\cdot\frac{2}{7}$$
$$s=2\cdot\frac{1}{3}$$
$$s=\frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=[1,0]+\frac{2}{3}\left[\frac{9}{2}-1,\frac{7}{2}-0\right]=[1,0]+\left[\frac{7}{3},\frac{7}{3}\right]=\left[\frac{10}{3},\frac{7}{3}\right]$$

$$\underline{\underline{s=t=\frac{2}{3}\text{ og }T\text{ har koordinater }\left(\frac{10}{3},\frac{7}{3}\right)}}$$

Oppgave 6

a)

Bruker total sannsynlighet:

$$0{,}08\cdot 0{,}92+0{,}92\cdot 0{,}02=0{,}92(0{,}08+0{,}02)=0{,}92\cdot 0{,}1=0{,}092=9{,}2\%,$$

<u>som skulle vises</u>

b)

$$\frac{0,08 \cdot 0,92}{0,092} = 0,08 \cdot \frac{92}{9,2} = 0,08 \cdot 10 = 0,8 = 80\%$$

<u>Sannsynligheten for at en defekt lyspære blir forkastet, er 80 %</u>

Oppgave 7

a)
Siden *SF* og *SD* er radius i sirkelen, vet vi at disse er like lange. Ser også at alle vinklene i firkant *CDSF* er $90°$. Det betyr at firkanten *CDSF* er et kvadrat.
Da har vi at $FC = SF = r$ og at $DC = SD = r$.

Dette gir $a = BF + FC = BF + r$ og $b = AD + DC = AD + r$, <u>som skulle forklares</u>

b)
AS deler $\angle A$ i to like store deler og både trekant *ASD* og *ASE* er rettvinklede, kan vi si at disse trekantene er formlike. I tillegg er korteste katet lik r i begge trekantene, så de er faktisk kongruente (altså formlike *og* like store). Det betyr at $AE = AD$.

Samme argumentasjonen kan brukes om trekantene *BSE* og *BSF*, men med utgangspunkt i at *BS* deler $\angle B$ i to like store deler, så vi kan si at $BE = BF$

Vi kan da si at $c = AE + BE = AD + BF$

$$a + b - c = 2r + BF + AD - (AD + BF) = 2r + BF + AD - AD - BF = 2r,$$
<u>som skulle vises</u>

c)

$a \perp b$, så vi kan se på *a* som grunnlinje og *b* som høyde. Da har vi $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

Vi kan dele trekanten inn i tre trekanter med grunnlinjer *a*, *b* og *c*. Høyden i alle disse trekantene vil være *r*.

Da har vi $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r + \frac{1}{2} \cdot b \cdot r + \frac{1}{2} \cdot c \cdot r = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$

Vi kan altså skrive arealet på to måter: $T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ og $T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$,

<u>som skulle vises</u>

d)
Setter de to ulike uttrykkene for arealet lik hverandre:

$$\frac{1}{2}\cdot a\cdot b=\frac{1}{2}\cdot r\cdot(a+b+c)$$

$$a\cdot b=r\cdot(a+b+c)$$

Bruker resultat fra b) og skriver $a+b-c=2r \Rightarrow r=\dfrac{a+b-c}{2}$, som settes inn for r

$$\begin{aligned}
a\cdot b&=\frac{1}{2}(a+b-c)(a+b+c)\\
2\cdot a\cdot b&=(a+b-c)(a+b+c)\\
2\cdot a\cdot b&=a^2+ab+ac+ab+b^2+bc-ac-bc-c^2\\
2\cdot a\cdot b&=a^2+2ab+b^2-c^2\\
a^2+2ab-2ab+b^2&=c^2\\
a^2+b^2&=c^2
\end{aligned}$$

<u>Som skulle vises</u>

Del 2

Oppgave 1

a) Hypergeometrisk sannsynlighetsmodell. Løser i CAS:

```
CAS
1  nCr[4, 3]*nCr[48, 2]/nCr[52, 5]
   ≈ 0.0017
```

<u>Sannsynligheten for å trekke nøyaktig tre tiere er 0,17 %</u>

b) Siden det er 13 ulike verdier, kan hendelsen tre kort med samme verdi skje på 13 måter.

```
CAS
1  13*nCr[4, 3]*nCr[48, 2]/nCr[52, 5]
   ≈ 0.0226
```

<u>Sannsynligheten for å trekke tre kort med samme verdi er 2,26 %</u>

c) Hypergeometrisk sannsynlighetsmodell.
Kan skje på fire måter, nemlig 5 hjerter, 5 kløver, 5 spar eller fem ruter.

CAS

1	4*nCr[13, 5]*nCr[39, 0]/nCr[52, 5]
	$\approx$ **0.002**

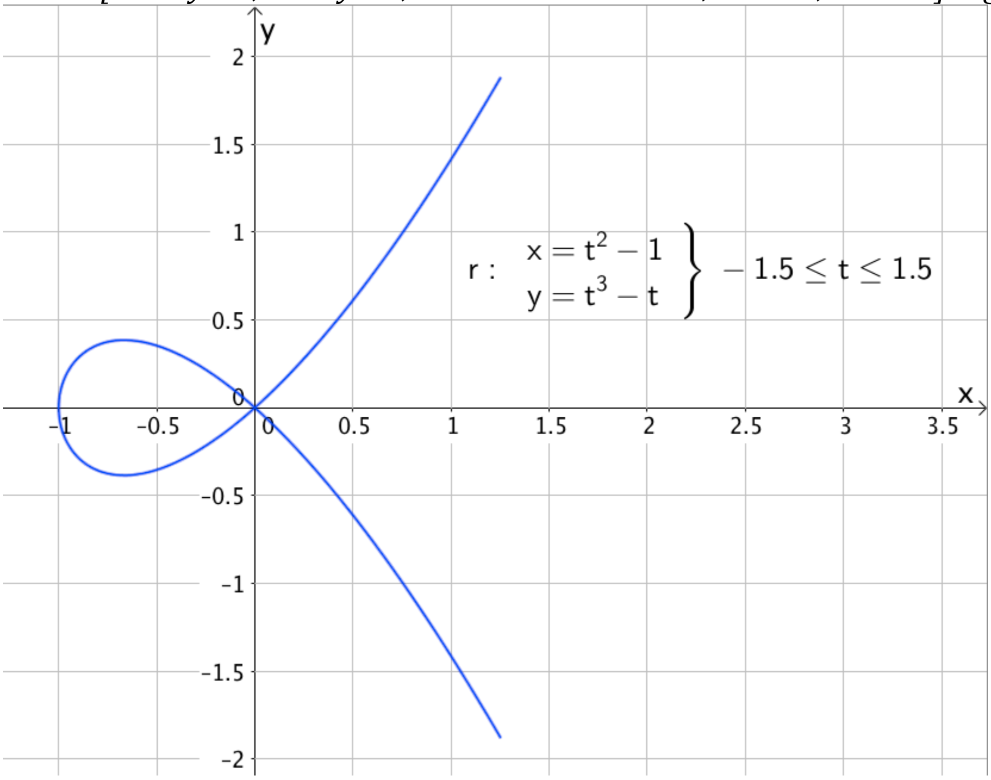
<u>Sannsynligheten for å trekke fem kort i samme kortfarge er 0,2 %</u>

Oppgave 2

a)

Bruker kommandoen

" Kurve[<Uttrykk>, <Uttrykk>, <Parametervariabel>, <Start>, <Slutt>]" og tegner grafen.



b) Bruker CAS

CAS

1	r(t):=Vektor[(t²-1,t³-t)]
	$\rightarrow$ $\mathbf{r(t)} := \begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix}$
2	v(t):=r'(t)
	$\rightarrow$ $\mathbf{v(t)} := \begin{pmatrix} 2\,t \\ 3\,t^2 - 1 \end{pmatrix}$
3	a(t):=v'(t)
	$\rightarrow$ $\mathbf{a(t)} := \begin{pmatrix} 2 \\ 6\,t \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{\text{Fartsvektoren er } \vec{v}(t)=\left[2t, 3t^2-1\right] \text{ og akselerasjonsvektoren er } \vec{a}(t)=\left[2, 6t\right]}}$$

c)
Definerer funksjonen $h(t)$, der $h(t)$ er lengden til fartsvektoren avhengig av t.

▸ CAS

1	r(t):=Vektor[(t²−1,t³−t)];
2	v(t):=r'(t);
3	h(t):=abs(v) → $h(t) := \sqrt{9t^4-2t^2+1}$
4	Ekstremalpunkt[h] → $\left\{\left(-\frac{1}{3}, 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\right), (0,1), \left(\frac{1}{3}, 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right\}$
5	{((−1) / 3, 2sqrt(2) / 3), (0, 1), (1 / 3, 2sqrt(2) / 3)} ≈ $\{(-0.33, 0.94), (0, 1), (0.33, 0.94)\}$

$$\underline{\underline{\text{Den minste banefarten til partikkelen er } \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx 0{,}94}}$$

Oppgave 3

a)
Kan uttrykke arealet av trekant ABC på to måter.

$$A=\frac{1}{2}x\cdot BC=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{7^2-x^2}$$

$$og$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot d$$

Setter uttrykkene lik hverandre og løser med hensyn på d

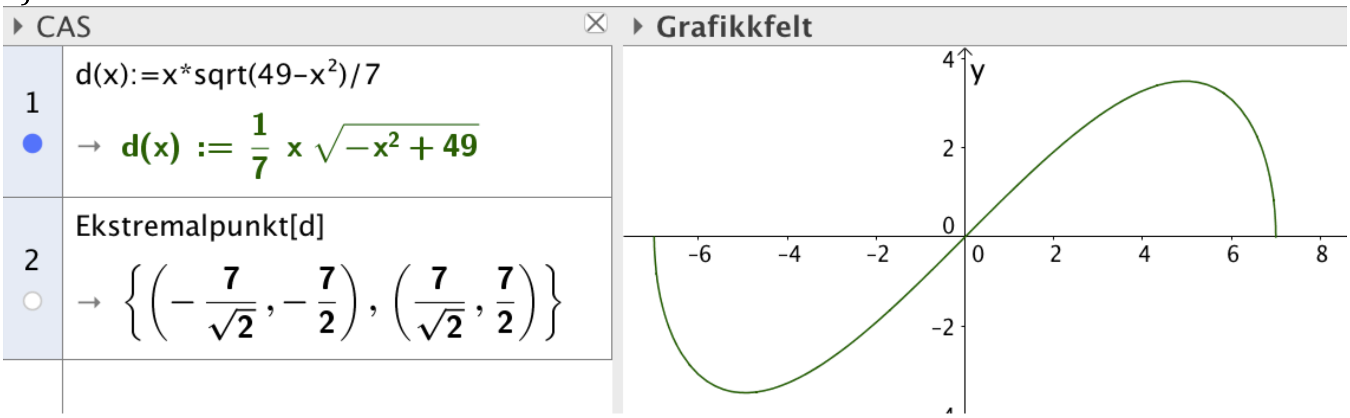
$$\frac{1}{2}\cdot 7\cdot d=\frac{1}{2}x\cdot\sqrt{7^2-x^2}$$

$$7d=x\cdot\sqrt{49-x^2}$$

$$d=\frac{x\cdot\sqrt{49-x^2}}{7}$$

<u>Som skulle vises</u>

b)

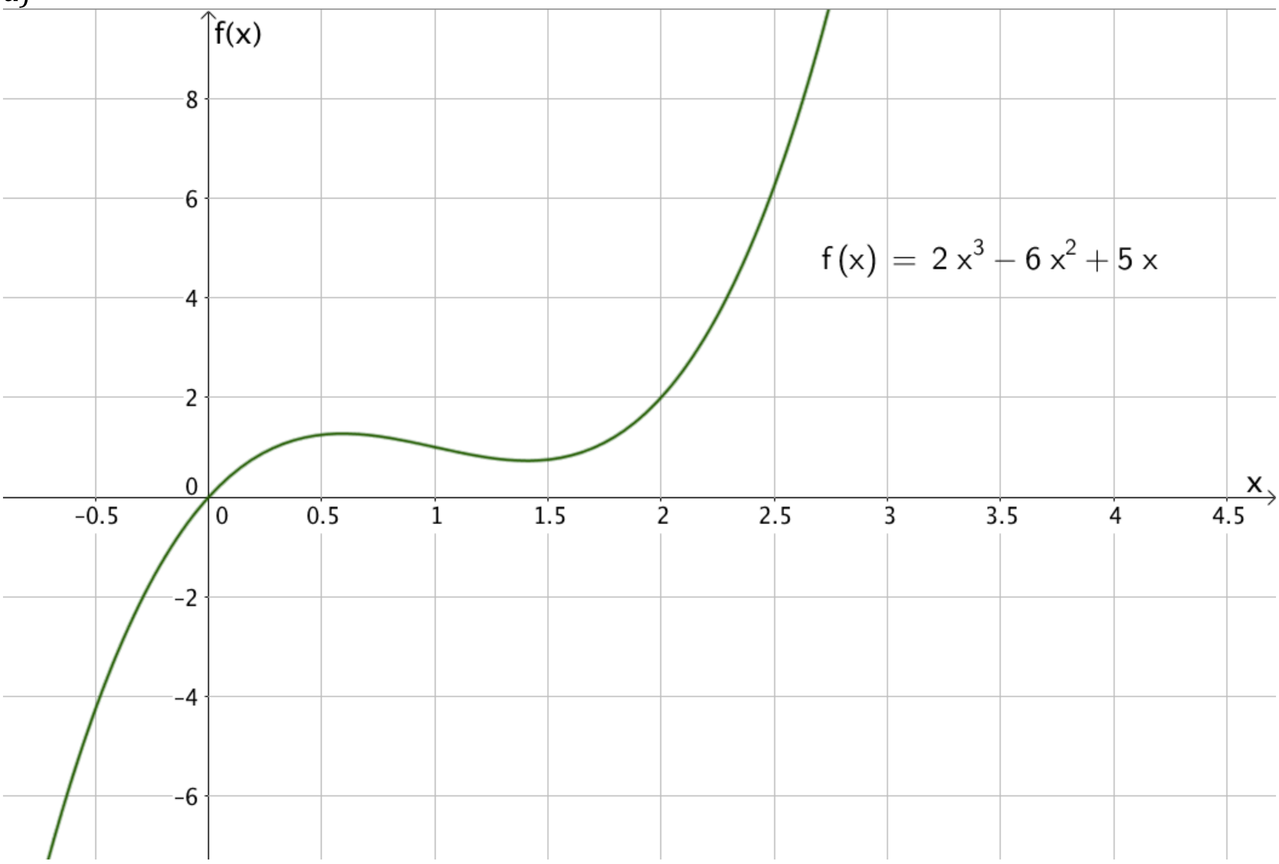


Må ha $x > 0$, så kun det ene ekstremalpunktet som er aktuelt. Ser av grafen at det er snakk om toppunkt.

$$\underline{\underline{d \text{ blir lengst mulig når } x = \frac{7}{\sqrt{2}} \approx 4{,}95. \text{ Da har vi } d = \frac{7}{2} = 3{,}5}}$$

Oppgave 4

a)



b)

$f'(x)$ gir oss stigningstallet til tangenten. Når vi vet at tangeringspunktet har koordinater $(x, f(x))$ og at tangenten også går gjennom $A(4,3)$, kan vi uttrykke stigningstallet slik: $\dfrac{f(x)-3}{x-4}$

Da har vi $\dfrac{f(x)-3}{x-4} = f'(x)$, som skulle forklares

c)

CAS

1
f(x):=2x³-6x²+5x
$\rightarrow\ f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 5x$

2
(f(x)-3)/(x-4)=f'(x)
Løs: $\left\{x = \frac{1}{2}, x = \frac{-\sqrt{15}+7}{2}, x = \frac{\sqrt{15}+7}{2}\right\}$

3
Tangent[(1/2,f(1/2)), f]
$\rightarrow\ y = \frac{1}{2}x + 1$

4
Tangent[((-sqrt(15)+7)/2,f(-sqrt(15)+7)/2), f]
$\rightarrow\ y = \left(-15\sqrt{15} + 59\right)x + 60\sqrt{15} - 233$

5
Tangent[((sqrt(15)+7)/2,f((sqrt(15)+7)/2)), f]
$\rightarrow\ y = \left(15\sqrt{15} + 59\right)x - 60\sqrt{15} - 233$

Løsningene av likningen står i rad 2 i bildet over. Likningene til de tre tangentene står i rad 3, 4 og 5 i bildet over.

d)

Bytter ut $(4,3)$ med (a,b)

$$\frac{f(x)-b}{x-a}=f'(x)$$

$$\frac{f(x)-b}{x-a}-f'(x)=0$$

$$f(x)-b-f'(x)\cdot(x-a)=0$$

CAS gir at dette er

CAS	
1	f(x):=2x^3-6x^2+5x → $f(x) := 2x^3 - 6x^2 + 5x$
2	f(x)-b-f'(x)*(x-a)=0 RegnUt: $6ax^2 - 12ax + 5a - b - 4x^3 + 6x^2 = 0$

"rydder litt" og får følgende likning

$$4x^3-(6a+6)x^2-12ax-5a+b=0$$

Dette er en tredjegradslikning som har maksimalt tre løsninger.

<u>Det maksimale antallet tangenter grafen til *f* kan ha, som går gjennom *P*, er 3</u>

NB! Her er det egentlig tilstrekkelig å argumentere for at likningen $f(x)-b-f'(x)\cdot(x-a)=0$ *er en tredjegradslikning og at det dermed maksimalt finnes tre løsninger. Vi kan se at vi får en tredjegradslikning uten å gjennomføre trinnene som er vist i CAS* siden $f(x)$ er et tredjegradsuttrykk og at $f'(x)$ *er et andregradsuttrykk, som multipliseres med en lineær faktor, slik at produktet vil bli et tredjegradsuttrykk.*