Del 1, eksamen vår 2017

Løsningsforslaget er ikke kontrollsjekket.

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene:

a) $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 5x + 4}$, Bruk derivasjonsregelen nx^{n-1}.

$$2 \cdot 3x^{3-1} - 5 = \mathbf{6x^2 - 5}$$

b) $\boldsymbol{g(x) = x^2 e^x}$, bruk produktregel $u' \cdot v + u \cdot v'$.

$u = x^2 \;\; og \; v = e^x, u' = 2x \;\; og \; v' = e^x.$

$$2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \mathbf{2xe^2 + e^x x^2}$$

c) $\mathbf{h(x)} = \sqrt{\boldsymbol{x^2 - 3}}$, bruk kjerneregelen $g'(u) \cdot u'$.

$\mathrm{u} = \mathrm{x}^2 - 3 \;\; og \; u' = 2x$

$$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \frac{\boldsymbol{x}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2-3}}}$$

Oppgave 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mulig:

a) $\boldsymbol{\frac{x^2-3}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} + \frac{5}{x-3}}$

$$\frac{x^2-3}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x+3} + \frac{5}{x-3}$$
$$= \frac{x^2-3}{(x+3)(x-3)} + \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} + \frac{5(x+3)}{(x-3)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-3+x-3+5(x+3)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2+6x+9}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{x+3}{x-3}}$$

b) $\mathbf{2\ln\left(a^{-3}b^{2}\right) - 3\ln\left(\frac{b}{a^{2}}\right)}$

$$\ln((a^{-3}b^{2})^{2}) - \ln\left(\left(\frac{b}{a^{2}}\right)^{3}\right) = \frac{(a^{-3}b^{2})^{2}}{\frac{b^{3}}{a^{6}}}$$

$$= \frac{\frac{b^{4}}{a^{6}}}{\frac{b^{3}}{a^{6}}} = \frac{b^{4}\cdot a^{6}}{a^{6}\cdot b^{3}} = \frac{b^{4}}{b^{3}} = \mathbf{\ln(b)}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

a) **Bestemme $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ gjør vi ved:**

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \left[B_x - A_x,\ B_y - A_y\right] = [2+1,\ 1-6] = [\mathbf{3}, -\mathbf{5}]$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = \left[C_x - A_x,\ C_y - A_y\right] = [4+1,\ 4-6] = [\mathbf{5}, -\mathbf{2}]$$

b) **Ett punkt D er gitt slik at:**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = [3,-5] + [x-4, y-4] = \vec{O}$$
$$[3 + (x-4), -5 + (y-4)] = [0,0]$$
$$[x-1, y-9] = [0,0]$$
$$x - 1 = 0\ og\ y - 9 = 0$$
$$x = 1\ og\ y = 9$$

Punkt D blir da $\boldsymbol{D} = (\mathbf{1}, \mathbf{9})$

Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen P er gitt ved:

$$P(x) = 2x^{3} - 6x^{2} - 2x + 6$$

a) **Begrunn at $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ er et vendepunkt på grafen til $\boldsymbol{p}$.**

Hvis vi dobbelt deriverer grafen p vil vi få:

$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = 12x - 12$$

Så setter vi den dobbeltderiverte $= 0$ som vil gi oss vendepunktet.

$$f''(x) = 12x - 12 = 0$$
$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = 12x = 12$$

Så deler vi med 12 på begge sider og ser at vi får $x = 1$ som vendepunkt i $(1, f(1))$. Vi regner ut $f''(1) = 12\cdot 1 - 12 = 0$ og ser at vi får et punkt i $(1, 0)$.

b) Faktoriser $P(x)$ i lineære faktorer:

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$$

Vi finner første nullpunkt i $P(x)$ ved $(x - 1)$:

$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 : (x - 1) = 2x^2$
$2x^3 - 2x^2$
$P(x) = -4x^2 - 2x + 6 : (x - 1) = -4x$
$-4x^2 + 4x$
$P(x) = -6x + 6 : (x - 1) = -6$
$-6x + 6$

$= 2x^2 - 4x - 6$ $\quad a = 2, \quad b = -4, \quad c = -6$

Så bruker vi ABC-formelen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4}$$

$$x_1 = \frac{4 + 8}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{4 - 8}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Dermed får vi:
$\mathbf{2(x + 1)(x - 1)(x - 3)}$

c) **Løs likningen:**

$$2\mathrm{e}^{3\mathrm{x}} - 6e^{2x} - 2e^x + 6 = 0$$

Dette er en tredjegradsfunksjon og dermed setter vi $e^x = u$.

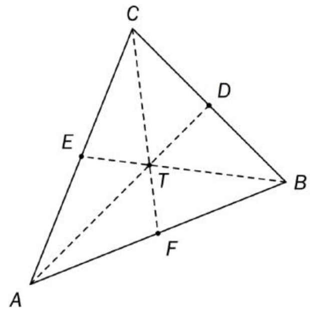
$$2\mathrm{u}^3 - 6u^2 - 2u + 6 = 0$$

Vi gjenkjenner funksjonen fra tidligere oppgave og vet at $(u - 1)$ er et nullpunkt. Vi kjenner også da til at $2u^2 - 4u - 6(u - 1) = (u + 1)(u - 1)(u - 3)$ = 0.

$u - 3 = 0$ gir $u = 3$ Som vil gi oss $e^x = 3 = x = \ln(3)$
$u - 1 = 0$ gir $u = 1$ Som vil gi oss $e^x = 1 = x = 0$
$u + 1 = 0$ gir $u = -1$ Som vil gi oss $e^x = -1 = x = \text{ingen løsning}$

NB! Man kan ikke ta logaritmen til et negativt tall, også er $\ln(1) = 0$.

Oppgave 5 (6 poeng)



Hjørnene til en trekant er $A(1{,}0),\ \ B(6{,}2)\ \ og\ \ C(3{,}5)$.

Midtpunktet på sidene i trekanten er $D, E\ og\ F$. Se figur til høyre.

a) **Forklar at koordinatene til punktene $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}\ \boldsymbol{og}\ \boldsymbol{F}$:**

$$D\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right), \qquad E\left(2,\frac{5}{2}\right) \qquad og \quad F\left(\frac{7}{2},1\right)$$

Vi begynner med utregningen:

$$D = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BC} = [-3,3] \rightarrow \overrightarrow{OB} = [6,2]$$

$$\boldsymbol{D} = [6,2] + \frac{1}{2}[-3,3] = \left[\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right] = \boldsymbol{D}\left(\frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{2}},\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

$$\boldsymbol{E} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC} = [1,0] + \frac{1}{2}[2,5] = \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{2},\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}}\right)$$

$$F = \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = [1,0] + \frac{1}{2}\cdot[5,2]$$

$$\boldsymbol{F} = \overrightarrow{OF} = \left[\frac{7}{2},1\right] = \boldsymbol{F}\left(\frac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{2}},\boldsymbol{1}\right)$$

b) **Forklar at vi kan skrive $\overrightarrow{\boldsymbol{AT}}$ på to måter:**

$$\overrightarrow{AT} = s\cdot\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AT} + t\cdot\overrightarrow{BE}$$

$\overrightarrow{AT} = s\cdot\overrightarrow{AD} \Longrightarrow \overrightarrow{AT}\ ||\ s\cdot\overrightarrow{AD},\ s\ \in\ \mathbb{R}$. Fordi de har samme retning, dette er uavhengig om en av vektorene er negativ eller positiv fra den andre.

$$\overrightarrow{AT} = s\cdot\left[\frac{9}{2}-1,\frac{7}{2}\right] = s\cdot\left[\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right]$$

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AT} + t\cdot\overrightarrow{BE} \ \Longrightarrow\ \overrightarrow{BT}\ ||\ \overrightarrow{BE} \ \Longrightarrow\ \overrightarrow{BT} = t\cdot\overrightarrow{BE}.$$

$$\overrightarrow{AB} = [5,2],\quad \overrightarrow{BE} = \left[2-6,\frac{5}{2}-2\right] = \left[-4,\frac{1}{2}\right]$$
$$\overrightarrow{AT} = [5,2] + t\cdot\left[-4,\frac{1}{2}\right] = \left[5-4t,2+\frac{1}{2}t\right]$$

c) $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AT}$

$$s \cdot \left[\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right] = \left[5 - 4t, 2 + \frac{1}{2}t\right]$$

1) $\frac{7}{2} \cdot s = 5 - 4t$ 2) $\frac{7}{2} \cdot s = 2 + \frac{1}{2} \cdot t$

Oppgave 6 (4 poeng)

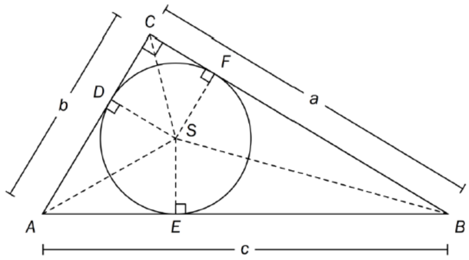
a) **Vis at sannsynligheten er $9,2\%$ for at en tilfeldig produsert lyspære er defekt.**

Usikker.

b) **Bruk Bayes' setning til å bestemme sannsynligheten for at en defekt lyspære blir forkastet i kontrollen.**

Usikker.

Oppgave 7 (7 poeng)



a) **Bruk figuren til å forklare at $\boldsymbol{a = BF + r}$ og $\boldsymbol{b = AD + r}$.**

b) **Vis at $\boldsymbol{a + b - c = 2r}$**

Usikker.

c) **Forklar at vi kan skrive arealet $\boldsymbol{t}$ av trekanten på to måter:**

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad og \quad T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$$

Usikker

d) Bruk resultatene du fant i oppgavene b) og c) til å utlede Pytagoras' setning.
Usikker

Del 2, eksamen vår 2017

Løsningsforslaget er ikke kontrollsjekket.

Oppgave 6 (4 poeng)

a) Bestem sannsynligheten for at du kommer til å trekke nøyaktig tre kort med verdi 10.

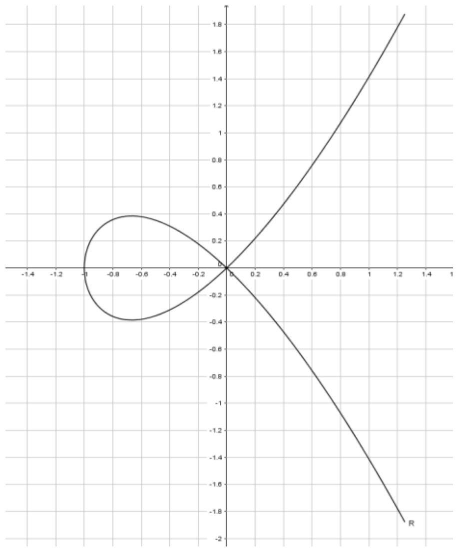
b)

c)

Oppgave 2 (6 poeng)

Posisjonsvektoren til en partikkel er gitt ved:

$$\vec{r}(t) = [t^2 - 1, t^3 - t]$$



a) **Tegn grafen til $\vec{r}$ når $t \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.**

Vi bruker graftegneren Geogebra til å tegne posisjonsvektoren. Se graf til høyre. Etter å ha tegnet grafen stiller vi den inn på $t \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

b) **Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$.**

Vi deriverer posisjonsvektoren og får:

$$\vec{v} = \vec{r}\,'(t) = [2t, 3t^2 - 1]$$