Del 1, eksamen vår 2017

Løsningsforslaget er ikke kontrollsjekket.

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene:

a) $\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - 5x + 4}$, Bruk derivasjonsregelen nx^{n-1}.

$$2 \cdot 3x^{3-1} - 5 = \mathbf{6x^2 - 5}$$

b) $\boldsymbol{g(x) = x^2 e^x}$, bruk produktregel $u' \cdot v + u \cdot v'$.

$u = x^2 \;\; og \; v = e^x, u' = 2x \;\; og \; v' = e^x.$

$$2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = \mathbf{2xe^2 + e^x x^2}$$

c) $\mathbf{h(x)} = \boldsymbol{\sqrt{x^2 - 3}}$, bruk kjerneregelen $g'(u) \cdot u'$.

$\mathrm{u} = \mathrm{x}^2 - 3 \;\; og \; u' = 2x$

$$\frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 2x = \boldsymbol{\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}}$$

Oppgave 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mulig:

a) $\boldsymbol{\frac{x^2-3}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} + \frac{5}{x-3}}$

$$\frac{x^2 - 3}{(x+3)(x-3)} + \frac{1}{x+3} + \frac{5}{x-3}$$

$$= \frac{x^2 - 3}{(x+3)(x-3)} + \frac{x-3}{(x+3)(x-3)} + \frac{5(x+3)}{(x-3)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2 - 3 + x - 3 + 5(x+3)}{(x-3)(x-3)} = \frac{x^2 + 6x + 9}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \boldsymbol{\frac{x+3}{x-3}}$$

b) $\mathbf{2\ln\left(a^{-3}b^2\right) - 3\ln\left(\frac{b}{a^2}\right)}$

$$\ln((a^{-3}b^2)^2) - \ln\left(\left(\frac{b}{a^2}\right)^3\right) = \frac{(a^{-3}b^2)^2}{\frac{b^3}{a^6}}$$

$$= \frac{\frac{b^4}{a^6}}{\frac{b^3}{a^6}} = \frac{b^4 \cdot a^6}{a^6 \cdot b^3} = \frac{b^4}{b^3} = \mathbf{\ln(b)}$$

Oppgave 3 (4 poeng)

a) **Bestemme $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ gjør vi ved:**

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = [B_x - A_x,\ \ B_y - A_y] = [2+1,\ \ 1-6] = [\mathbf{3}, -\mathbf{5}]$$
$$\overrightarrow{\boldsymbol{AC}} = [C_x - A_x,\ \ C_y - A_y] = [4+1, 4-6] = [\mathbf{5}, -\mathbf{2}]$$

b) **Ett punkt D er gitt slik at:**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = [3,-5] + [x-4, y-4] = \vec{O}$$
$$[3 + (x-4), -5 + (y-4)] = [0,0]$$
$$[x-1, y-9] = [0,0]$$
$$x - 1 = 0\ og\ y - 9 = 0$$
$$x = 1\ og\ y = 9$$

Punkt D blir da $\boldsymbol{D} = (\mathbf{1}, \mathbf{9})$

Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen P er gitt ved:

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$$

a) **Begrunn at $(\mathbf{1}, \mathbf{0})$ er et vendepunkt på grafen til $\boldsymbol{p}$.**

Hvis vi dobbelt deriverer grafen p vil vi få:

$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = 12x - 12$$

Så setter vi den dobbeltderiverte $= 0$ som vil gi oss vendepunktet.

$$f''(x) = 12x - 12 = 0$$
$$\mathrm{f}''(\mathrm{x}) = 12x = 12$$

Så deler vi med 12 på begge sider og ser at vi får $x = 1$ som vendepunkt i $(1, f(1))$. Vi regner ut $f''(1) = 12 \cdot 1 - 12 = 0$ og ser at vi får et punkt i $(1, 0)$.

b) Faktoriser $P(x)$ i lineære faktorer:

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$$

Vi finner første nullpunkt i $P(x)$ ved $(x-1)$:

$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 : (x-1) = 2x^2$
$\quad\quad\quad 2x^3 - 2x^2$
$P(x) = -4x^2 - 2x + 6 : (x-1) = -4x$
$\quad\quad\quad -4x^2 + 4x$
$P(x) = -6x + 6 : (x-1) = -6$
$\quad\quad\quad -6x + 6$

$= 2x^2 - 4x - 6 \quad\quad\quad\quad a = 2, \quad b = -4, \quad c = -6$

Så bruker vi ABC-formelen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \frac{4 \pm 8}{4}$$

$$x_1 = \frac{4+8}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x_2 = \frac{4-8}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Dermed får vi:
$(\boldsymbol{x+1})(\boldsymbol{x-1})(\boldsymbol{x-3})$

c) **Løs likningen:**

$$2e^{3x} - 6e^{2x} - 2e^x + 6 = 0$$

Tredjegradsfunksjon, vi setter $e^x = u$.

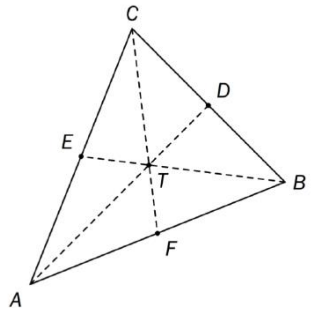
$$2u^3 - 6u^2 - 2u + 6 = 0$$

Vi gjenkjenner funksjonen fra tidligere oppgave og vet at $(u-1)$ er et nullpunkt. Vi kjenner også da til at $2u^2 - 4u - 6(u-1) = (u+1)(u-1)(u-3)$ = 0.

$u - 3 = 0$ gir $u = 3$ Som vil gi oss $e^x = 3 = x = \ln(3)$
$u - 1 = 0$ gir $u = 1$ Som vil gi oss $e^x = 1 = x = 0$
$u + 1 = 0$ gir $u = -1$ Som vil gi oss $e^x = -1 = x = \text{ingen løsning}$

NB! Man kan ikke ta logaritmen til et negativt tall, også er $\ln(1) = 0$.

Oppgave 5 (6 poeng)



Hjørnene til en trekant er $A(1{,}0)$, $B(6{,}2)$ og $C(3{,}5)$.

Midtpunktet på sidene i trekanten er $D, E\ og\ F$. Se figur til høyre.

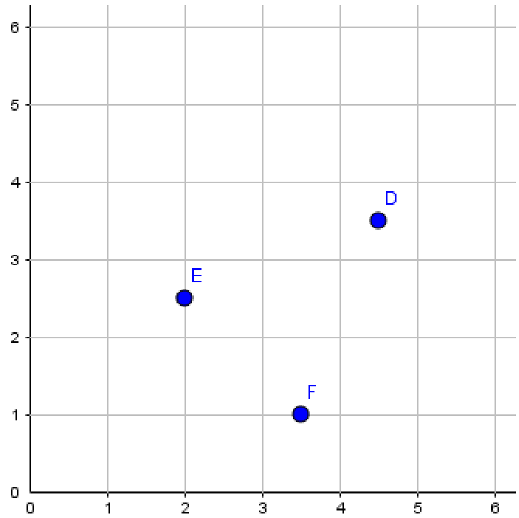
a) **Forklar at koordinatene til punktene $D, E\ og\ F$:**

Vi ser at $D\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right) = (4{,}5\ ,3{,}5)$

$E\left(2,\frac{5}{2}\right) = (2\ ,2{,}5)$

$F\left(\frac{7}{2},1\right) = (3{,}5\ ,1)$

Dermed tegner vi et koordinatsystem og legger inn punktene:



Ved observasjon ser vi at punktene former en trekant på $D, E\ og\ F$ som er punktene til medianene av trekanten ΔABC.

b) **Forklar at vi kan skrive $\overrightarrow{AT}$ på to måter:**

$$\overrightarrow{AT} = s \cdot \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AT} + t \cdot \overrightarrow{BE}$$

$s \cdot \overrightarrow{AD}$ er || med $\overrightarrow{AT}$ fordi de har samme retning, dette er uavhengig om en av vektorene er negativ eller positiv fra den andre.

Usikker for $\overrightarrow{AT} + t \cdot \overrightarrow{BE}$

c) Usikker på oppgave c.

Oppgave 6 (4 poeng)

a) Vis at sannsynligheten er 9,2% for at en tilfeldig produsert lyspære er defekt.

Usikker.

b) Bruk Bayes' setning til å bestemme sannsynligheten for at en defekt lyspære blir forkastet i kontrollen.

Usikker.

Oppgave 7 (7 poeng)