Utdanningsdirektoratet

Eksamen

19.05.2017

REA3022 Matematikk R1

Nynorsk/Bokmål

Nynorsk

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timar: Del 1 skal leverast inn etter 3 timar. Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar.
Hjelpemiddel på Del 1:	Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar.
Hjelpemiddel på Del 2:	Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 7 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver. Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing. Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast med utskrift eller gjennom ein IKT-basert eksamen.
Rettleiing om vurderinga:	Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du – viser rekneferdigheiter og matematisk forståing – gjennomfører logiske resonnement – ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar – kan bruke formålstenlege hjelpemiddel – forklarer framgangsmåtar og grunngir svar – skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar – vurderer om svar er rimelege
Andre opplysningar:	Kjelder for bilete, teikningar osv.: • Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Utan hjelpemiddel

Oppgåve 1 (5 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 2x^3 - 5x + 4$

b) $g(x) = x^2 e^x$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

Oppgåve 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mogleg

a) $\dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 9} + \dfrac{1}{x+3} + \dfrac{5}{x-3}$

b) $2\ln(a^{-3}b^2) - 3\ln\left(\dfrac{b}{a^2}\right)$

Oppgåve 3 (4 poeng)

Tre punkt $A(-1, 6)$, $B(2, 1)$ og $C(4, 4)$ er gitt.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Eit punkt D er gitt slik at

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

b) Bestem koordinatane til D.

Oppgåve 4 (6 poeng)

Funksjonen P er gitt ved

$$P(x)=2x^3-6x^2-2x+6$$

a) Grunngi at $(1,0)$ er eit vendepunkt på grafen til P.

b) Faktoriser $P(x)$ i lineære faktorar.

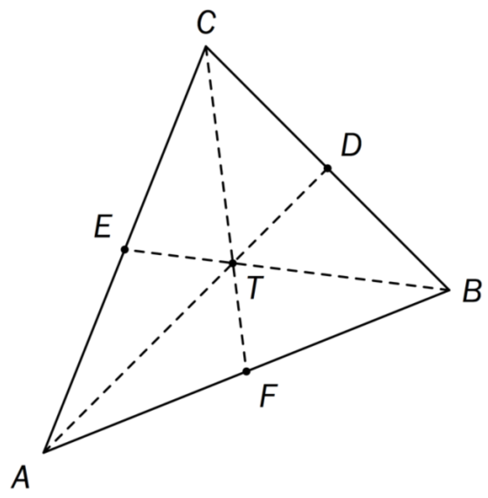
c) Løys likninga

$$2e^{3x}-6e^{2x}-2e^{x}+6=0$$

Oppgåve 5 (6 poeng)

Hjørna i ein trekant er $A(1,0)$, $B(6,2)$ og $C(3,5)$.

Midtpunkta på sidene i trekanten er D, E og F. Sjå figuren.



a) Forklar at koordinatane til punkta D, E og F er

$$D\left(\frac{9}{2},\frac{7}{2}\right),\quad E\left(2,\frac{5}{2}\right)\quad \text{og}\quad F\left(\frac{7}{2},1\right)$$

Skjeringspunktet mellom medianane i trekanten er T.

b) Forklar at vi kan skrive $\overrightarrow{AT}$ på to måtar:

$$\overrightarrow{AT}=s\cdot\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AT}=\overrightarrow{AB}+t\cdot\overrightarrow{BE}$$

der s og t er reelle tall.

c) Bruk vektorlikningane i oppgåve b) til å bestemme s og t. Bestem koordinatane til T.

Oppgåve 6 (4 poeng)

Ein fabrikk produserer lyspærer. Alle lyspærene blir kontrollerte. I kontrollen blir 8,0 % av lyspærene forkasta. Nærmare undersøkingar viser at

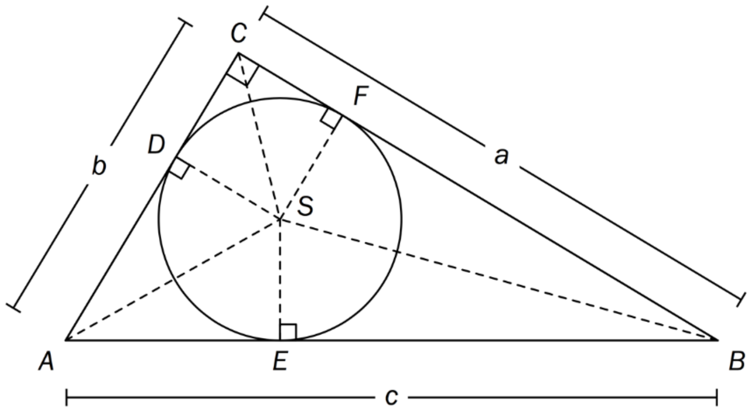
- 92,0 % av dei forkasta lyspærene er defekte
- 2,0 % av dei godkjende lyspærene er defekte

a) Vis at sannsynet er 9,2 % for at ei tilfeldig produsert lyspære er defekt.

b) Bruk Bayes' setning til å bestemme sannsynet for at ei defekt lyspære blir forkasta i kontrollen.

Oppgåve 7 (7 poeng)

Ein rettvinkla $\triangle ABC$ der $\angle C = 90^\circ$ er gitt. Den innskrivne sirkelen har sentrum i S og radius r. Sirkelen tangerer trekanten i punkta D, E og F. Vi set $AC = b$, $BC = a$ og $AB = c$. Du får oppgitt at $BF = BE$ og $AD = AE$.



a) Bruk figuren til å forklare at $a = BF + r$ og $b = AD + r$

Av figuren ser vi dessutan at $c = AE + BE$.

b) Vis at $a + b - c = 2r$

c) Forklar at vi kan skrive arealet T av trekanten på to måtar:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad \text{og} \quad T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$$

d) Bruk resultata du fann i oppgåvene b) og c) til å utleie Pytagoras' setning.

DEL 2
Med hjelpemiddel

Oppgåve 1 (6 poeng)

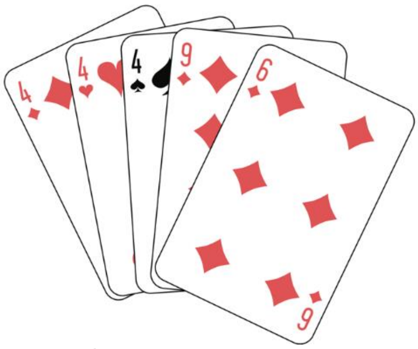
I ein kortstokk er det 52 kort. Korta er fordelte på dei fire fargene hjarte, ruter, spar og kløver. Kvar farge har 13 kort fordelte på verdiane 2 til 10, knekt, dame, konge og ess. Tenk deg at du skal trekkje tilfeldig fem kort frå kortstokken.

a) Bestem sannsynet for at du kjem til å trekkje nøyaktig tre kort med verdi 10.

b) Bestem sannsynet for at du kjem til å trekkje nøyaktig tre kort med same verdi.

c) Bestem sannsynet for at alle korta du kjem til å trekkje, har same farge.

Figur 1:
Eitt mogleg utfall i oppgåve a)



Figur 2:
Eitt mogleg utfall i oppgåve b)

Figur 3:
Eitt mogleg utfall i oppgåve c)

Oppgåve 2 (6 poeng)

Posisjonsvektoren til ein partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^2 - 1, t^3 - t]$$

a) Teikn grafen til $\vec{r}$ når $t \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$.

c) Bruk CAS til å bestemme den minste banefarten til partikkelen.

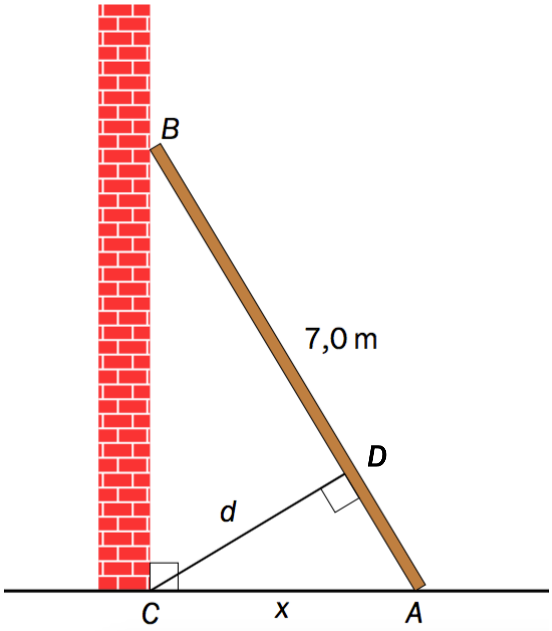
Oppgåve 3 (4 poeng)

Ein stige på 7,0 m er stilt opp langs ein vegg. Stigen dannar saman med veggen og bakken ein rettvinkla $\triangle ABC$. Sjå figuren.

Vi set $AC = x$. Den kortaste avstanden frå C til stigen er d meter.

a) Vis at $d = \dfrac{x\sqrt{49 - x^2}}{7}$

b) Bestem x slik at d blir lengst mogleg. Kor lang er d for denne verdien av x?



Oppgåve 4 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x$$

a) Bruk grafteiknar til å teikne grafen til f.

Grafen til f har tre tangentar som går gjennom punktet $A(4, 3)$.

b) Forklar at x-koordinaten til tangeringspunkta må vere løysing av likninga

$$\frac{f(x) - 3}{x - 4} = f'(x)$$

c) Bruk CAS til å løyse denne likninga. Bestem likninga til kvar av tangentane.

La $P(a, b)$ vere eit punkt i planet.

d) Kva er det maksimale talet på tangentar grafen til f kan ha som går gjennom P?

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Del 1 skal leveres inn etter 3 timer. Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer.
Hjelpemidler på Del 1:	Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler.
Hjelpemidler på Del 2:	Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon.
Framgangsmåte:	Del 1 har 7 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver. Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling. Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen.
Veiledning om vurderingen:	Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser regneferdigheter og matematisk forståelse – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner – kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger – vurderer om svar er rimelige
Andre opplysninger:	Kilder for bilder, tegninger osv.: • Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet

DEL 1
Uten hjelpemidler

Oppgave 1 (5 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2x^3 - 5x + 4$

b) $g(x) = x^2 e^x$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 3}$

Oppgave 2 (4 poeng)

Skriv så enkelt som mulig

a) $\dfrac{x^2 - 3}{x^2 - 9} + \dfrac{1}{x + 3} + \dfrac{5}{x - 3}$

b) $2\ln(a^{-3}b^2) - 3\ln\left(\dfrac{b}{a^2}\right)$

Oppgave 3 (4 poeng)

Tre punkt $A(-1, 6)$, $B(2, 1)$ og $C(4, 4)$ er gitt.

a) Bestem $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

Et punkt D er gitt slik at

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$$

b) Bestem koordinatene til D.

Oppgave 4 (6 poeng)

Funksjonen P er gitt ved

$$P(x) = 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6$$

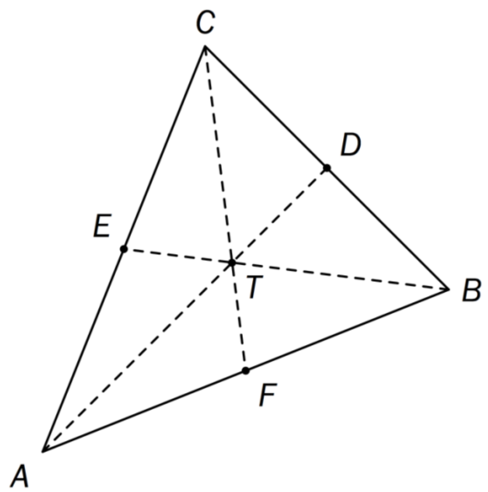
a) Begrunn at $(1, 0)$ er et vendepunkt på grafen til P.

b) Faktoriser $P(x)$ i lineære faktorer.

c) Løs likningen

$$2e^{3x} - 6e^{2x} - 2e^x + 6 = 0$$

Oppgave 5 (6 poeng)



Hjørnene i en trekant er $A(1,0)$, $B(6,2)$ og $C(3,5)$.

Midtpunktene på sidene i trekanten er D, E og F. Se figuren.

a) Forklar at koordinatene til punktene D, E og F er

$$D\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right), \quad E\left(2, \frac{5}{2}\right) \quad \text{og} \quad F\left(\frac{7}{2}, 1\right)$$

Skjæringspunktet mellom medianene i trekanten er T.

b) Forklar at vi kan skrive $\overrightarrow{AT}$ på to måter:

$$\overrightarrow{AT} = s \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{BE}$$

der s og t er reelle tall.

c) Bruk vektorlikningene i oppgave b) til å bestemme s og t. Bestem koordinatene til T.

Oppgave 6 (4 poeng)

En fabrikk produserer lyspærer. Alle lyspærene blir kontrollert. I kontrollen blir 8,0 % av lyspærene forkastet. Nærmere undersøkelser viser at

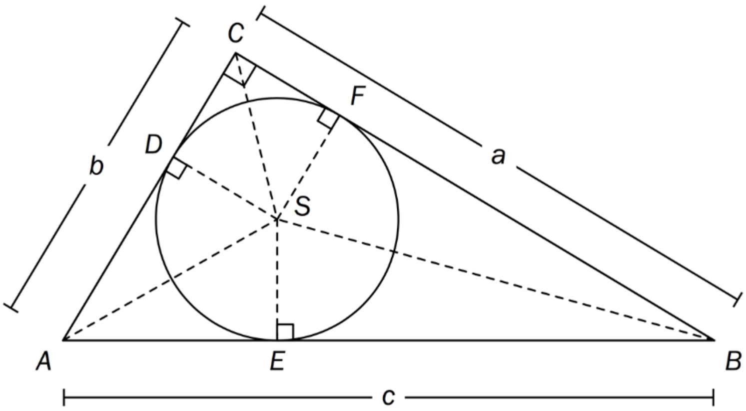
- 92,0 % av de forkastede lyspærene er defekte
- 2,0 % av de godkjente lyspærene er defekte

a) Vis at sannsynligheten er 9,2 % for at en tilfeldig produsert lyspære er defekt.

b) Bruk Bayes' setning til å bestemme sannsynligheten for at en defekt lyspære blir forkastet i kontrollen.

Oppgave 7 (7 poeng)

En rettvinklet $\triangle ABC$ der $\angle C = 90^\circ$ er gitt. Den innskrevne sirkelen har sentrum i S og radius r. Sirkelen tangerer trekanten i punktene D, E og F. Vi setter $AC = b$, $BC = a$ og $AB = c$. Du får oppgitt at $BF = BE$ og $AD = AE$.



a) Bruk figuren til å forklare at $a = BF + r$ og $b = AD + r$

Av figuren ser vi dessuten at $c = AE + BE$.

b) Vis at $a + b - c = 2r$

c) Forklar at vi kan skrive arealet T av trekanten på to måter:

$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \quad \text{og} \quad T = \frac{1}{2} \cdot r \cdot (a + b + c)$$

d) Bruk resultatene du fant i oppgavene b) og c) til å utlede Pytagoras' setning.

DEL 2
Med hjelpemidler

Oppgave 1 (6 poeng)

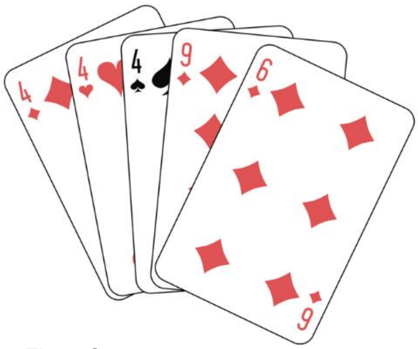
I en kortstokk er det 52 kort. Kortene er fordelt på de fire fargene hjerter, ruter, spar og kløver. Hver farge har 13 kort fordelt på verdiene 2 til 10, knekt, dame, konge og ess. Tenk deg at du skal trekke tilfeldig fem kort fra kortstokken.

a) Bestem sannsynligheten for at du kommer til å trekke nøyaktig tre kort med verdi 10.

b) Bestem sannsynligheten for at du kommer til å trekke nøyaktig tre kort med samme verdi.

c) Bestem sannsynligheten for at alle kortene du kommer til å trekke, har samme farge.

Figur 1:
Ett mulig utfall i oppgave a)



Figur 2:
Ett mulig utfall i oppgave b)

Figur 3:
Ett mulig utfall i oppgave c)

Oppgave 2 (6 poeng)

Posisjonsvektoren til en partikkel er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^2 - 1,\, t^3 - t]$$

a) Tegn grafen til $\vec{r}$ når $t \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

b) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$.

c) Bruk CAS til å bestemme den minste banefarten til partikkelen.

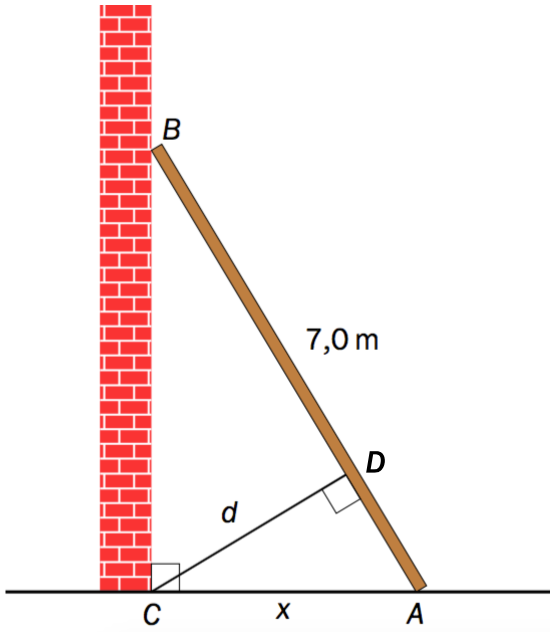
Oppgave 3 (4 poeng)

En stige på 7,0 m er stilt opp langs en vegg. Stigen danner sammen med veggen og bakken en rettvinklet $\triangle ABC$. Se figuren.

Vi setter $AC = x$. Den korteste avstanden fra C til stigen er d meter.

a) Vis at $d = \dfrac{x\sqrt{49 - x^2}}{7}$

b) Bestem x slik at d blir lengst mulig.
Hvor lang er d for denne verdien av x?



Oppgave 4 (8 poeng)

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5x$$

a) Bruk graftegner til å tegne grafen til f.

Grafen til f har tre tangenter som går gjennom punktet $A(4, 3)$.

b) Forklar at x-koordinaten til tangeringspunktene må være løsning av likningen

$$\frac{f(x) - 3}{x - 4} = f'(x)$$

c) Bruk CAS til å løse denne likningen. Bestem likningen til hver av tangentene.

La $P(a, b)$ være et punkt i planet.

d) Hva er det maksimale antallet tangenter grafen til f kan ha som går gjennom P?

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet