Utdanningsdirektoratet

# Eksamen

23.05.2016

REA3024 Matematikk R2

Nynorsk/Bokmål

# Nynorsk

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid:** | 5 timar:<br>Del 1 skal leverast inn etter 3 timar.<br>Del 2 skal leverast inn seinast etter 5 timar. |
| **Hjelpemiddel på Del 1:** | Vanlege skrivesaker, passar, linjal med centimetermål og vinkelmålar. |
| **Hjelpemiddel på Del 2:** | Alle hjelpemiddel er tillatne, med unntak av Internett og andre verktøy som tillèt kommunikasjon. |
| **Framgangsmåte:** | Del 1 har 8 oppgåver. Del 2 har 4 oppgåver.<br><br>Der oppgåveteksten ikkje seier noko anna, kan du fritt velje framgangsmåte. Om oppgåva krev ein bestemt løysingsmetode, vil ein alternativ metode kunne gi låg/noko utteljing.<br><br>Bruk av digitale verktøy som grafteiknar og CAS skal dokumenterast med utskrift eller gjennom ein IKT-basert eksamen. |
| **Rettleiing om vurderinga:** | Poeng i Del 1 og Del 2 er berre rettleiande i vurderinga. Karakteren blir fastsett etter ei samla vurdering. Det betyr at sensor vurderer i kva grad du<br><br>– viser rekneferdigheiter og matematisk forståing<br>– gjennomfører logiske resonnement<br>– ser samanhengar i faget, er oppfinnsam og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjonar<br>– kan bruke formålstenlege hjelpemiddel<br>– forklarer framgangsmåtar og grunngir svar<br>– skriv oversiktleg og er nøyaktig med utrekningar, nemningar, tabellar og grafiske framstillingar<br>– vurderer om svar er rimelege |
| **Andre opplysningar:** | Kjelder for bilete, teikningar osv.:<br>• Bergen: city.samondeo.com/bergen-norway.php (19.09.2015)<br>• Rykte: theback40k.blogspot.no (19.09.2015)<br>• Alle grafar og figurar: Utdanningsdirektoratet |

# DEL 1
## Utan hjelpemiddel

### Oppgåve 1 (3 poeng)

Deriver funksjonane

a) $f(x) = 2\cos 5x$

b) $g(x) = \mathrm{e}^{-2x}\sin x$

### Oppgåve 2 (4 poeng)

Bestem integrala

a) $\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$

b) $\int \frac{2}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$

### Oppgåve 3 (6 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

Eit flatestykke er avgrensa av $x$-aksen og grafen til $f$.

a) Rekn ut arealet av flatestykket.

b) Vis ved derivasjon at $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$

Vi roterer flatestykket $360^\circ$ om $x$-aksen.

c) Rekn ut volumet av omdreiingslekamen vi da får.

## Oppgåve 4 (5 poeng)

Rekkja $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ er gitt.

a) Forklar at dette er ei geometrisk rekkje. Bestem eit uttrykk for summen $S_n$ av dei $n$ første ledda i rekkja.

Vi har gitt produktet $P_n(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[16]{x}\cdot\ \ldots\cdot\sqrt[2^n]{x}$ , $x>0$

b) Vis at $P_n(x)=x^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$

c) Bestem $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$

## Oppgåve 5 (6 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x)=3\cos 2x \quad , \quad x\in\langle 0,\, 2\pi\rangle$$

a) Bestem eventuelle nullpunkt til $f$.

b) Bestem eventuelle topp- eller botnpunkt på grafen til $f$.

c) Lag ei skisse av grafen til $f$.

## Oppgåve 6 (3 poeng)

Løys differensiallikninga

$$y'-xy=x \quad , \quad y(0)=1$$

## Oppgåve 7 (7 poeng)

Punkta $A(1, -4, 1)$ og $B(3, 0, 5)$ ligg i planet $\alpha$.

Vektoren $\vec{n}_\alpha = [k, 1, -k]$ står normalt på $\alpha$ for ein bestemt verdi av konstanten $k$.

a) Vis at planet $\alpha$ er gitt ved $2x + y - 2z + 4 = 0$

Planet $\alpha$ skjer $z$-aksen i punktet $C$.

b) Bestem koordinatane til $C$.

c) Bestem volumet av pyramiden $ABCO$, der $O$ er origo.

Ei kule har sentrum i origo og tangerer planet $\alpha$ i eit punkt $P$.

d) Bestem koordinatane til punktet $P$.

## Oppgåve 8 (2 poeng)

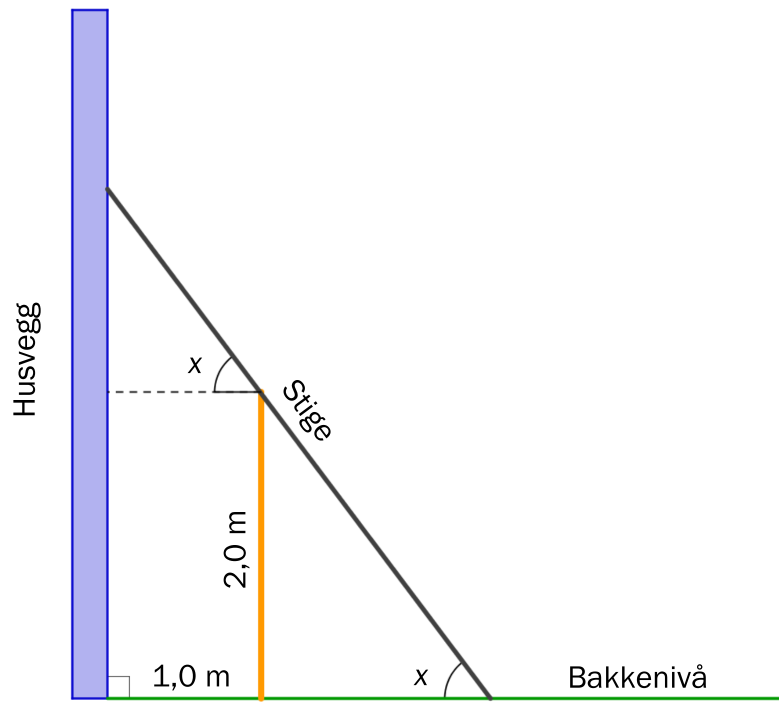
Bruk induksjon til å bevise påstanden $P$ gitt ved

$$P(n): \ \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^{n-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

# DEL 2
## Med hjelpemiddel

**Oppgåve 1** (6 poeng)

Ein stige, som kan justerast, skal stå på skrå mot ein husvegg og berøre eit 2,0 m høgt gjerde. Gjerdet står 1,0 m frå husveggen. La $x$ vere vinkelen mellom stigen og bakken. Sjå skissa nedanfor.




a) Vis at lengda av stigen, målt i meter, er

$$L(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin x} \quad , \quad \text{der} \quad 0^\circ < x < 90^\circ$$

b) Bestem $x$ slik at lengda av stigen blir kortast mogleg.
Kor høgt opp på veggen rekk stigen då?

## **Oppgåve 2** (8 poeng)

Daglengda $D$ i Bergen er tilnærma gitt ved funksjonen

$$D(t) = 6,63\sin(0,0172t - 1,39) + 12,5$$

Her er $D(t)$ daglengda målt i timar, og $t$ er dagar frå nyttår.

a) Bruk uttrykket $D(t)$ til å bestemme den kortaste og den lengste daglengda i Bergen.

b) Bruk grafteiknar til å teikne grafen til $D$ for $t \in [0, 365]$.

c) Når er daglengda i Bergen 14 timar?

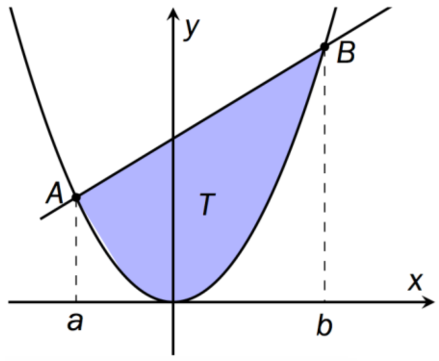
d) Undersøk på kva dato daglengda veks raskast.
Kor mykje aukar daglengda per døgn da?

## **Oppgåve 3** (6 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = x^2$$

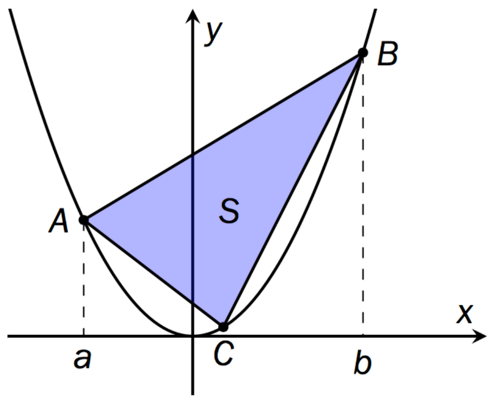
Punkta $A(a, a^2)$ og $B(b, b^2)$ der $a < b$, ligg på grafen til $f$. Sjå figur 1 nedanfor.




Figur 1

a) Grafen til $f$ og linjestykket $AB$ avgrensar eit flatestykke med areal $T$.
Bruk CAS til å bestemme $T$ uttrykt ved $a$ og $b$.

Punktet $C$ på grafen har koordinatane $(c, c^2)$, der $c = \dfrac{a+b}{2}$. Sjå figur 2 nedanfor.




Figur 2

b) Bruk CAS til å vise at arealet $S$ av $\Delta ACB$ er $S = \dfrac{1}{8}(b-a)^3$.

c) Bestem forholdet $\dfrac{T}{S}$.

## **Oppgåve 4** (4 poeng)

I ei bygd med 1200 innbyggjarar spreier det seg eit rykte. La $y$ vere talet på innbyggjarar som kjenner til ryktet ved tida $t$, der $t$ er tida målt i dagar etter at ryktet oppstod.

Vi går ut frå at ryktet blir spreidd med ein fart som til kvar tid er proporsjonal med produktet av talet på innbyggjarar som kjenner ryktet, og talet på innbyggjarar som ikkje kjenner det. Proporsjonalitetskonstanten har verdien $0{,}0006$.

Ved tida $t = 0$ var det berre éin person som kjende til ryktet.

a) Set opp ei differensiallikning som beskriv situasjonen ovanfor.

b) Kor lang tid tek det før halve bygda kjenner til ryktet?

# Bokmål

| Eksamensinformasjon | |
|---|---|
| **Eksamenstid:** | 5 timer:<br>Del 1 skal leveres inn etter 3 timer.<br>Del 2 skal leveres inn senest etter 5 timer. |
| **Hjelpemidler på Del 1:** | Vanlige skrivesaker, passer, linjal med centimetermål og vinkelmåler. |
| **Hjelpemidler på Del 2:** | Alle hjelpemidler er tillatt, med unntak av Internett og andre verktøy som tillater kommunikasjon. |
| **Framgangsmåte:** | Del 1 har 8 oppgaver. Del 2 har 4 oppgaver.<br><br>Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Dersom oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, kan en alternativ metode gi lav/noe uttelling.<br><br>Bruk av digitale verktøy som graftegner og CAS skal dokumenteres med utskrift eller gjennom en IKT-basert eksamen. |
| **Veiledning om vurderingen:** | Poeng i Del 1 og Del 2 er bare veiledende i vurderingen. Karakteren blir fastsatt etter en samlet vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du<br><br>– viser regneferdigheter og matematisk forståelse<br>– gjennomfører logiske resonnementer<br>– ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan ta i bruk fagkunnskap i nye situasjoner<br>– kan bruke hensiktsmessige hjelpemidler<br>– forklarer framgangsmåter og begrunner svar<br>– skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger<br>– vurderer om svar er rimelige |
| **Andre opplysninger:** | Kilder for bilder, tegninger osv.:<br>• Bergen: city.samondeo.com/bergen-norway.php (19.09.2015)<br>• Rykte: theback40k.blogspot.no (19.09.2015)<br>• Alle grafer og figurer: Utdanningsdirektoratet |

# DEL 1
## Uten hjelpemidler

### Oppgave 1 (3 poeng)

Deriver funksjonene

a) $f(x) = 2\cos 5x$

b) $g(x) = e^{-2x} \sin x$

### Oppgave 2 (4 poeng)

Bestem integralene

a) $\int_1^e \frac{3}{x}\,dx$

b) $\int \frac{2}{x^2 - 1}\,dx$

### Oppgave 3 (6 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = \sin x \quad , \quad x \in [0, \pi]$$

Et flatestykke er avgrenset av $x$-aksen og grafen til $f$.

a) Regn ut arealet av flatestykket.

b) Vis ved derivasjon at $\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x + C$

Vi roterer flatestykket $360°$ om $x$-aksen.

c) Regn ut volumet av omdreiningslegemet vi da får.

## Oppgave 4 (5 poeng)

Rekken $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ er gitt.

a) Forklar at dette er en geometrisk rekke. Bestem et uttrykk for summen $S_n$ av de $n$ første leddene i rekken.

Vi har gitt produktet $P_n(x)=\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\sqrt[8]{x}\cdot\sqrt[16]{x}\cdot\ \ldots\cdot\sqrt[2^n]{x}$ , $x>0$

b) Vis at $P_n(x)=x^{\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$

c) Bestem $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(x)$

## Oppgave 5 (6 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$f(x)=3\cos 2x$ , $x\in\langle 0,\, 2\pi\rangle$

a) Bestem eventuelle nullpunkter til $f$.

b) Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkter på grafen til $f$.

c) Lag en skisse av grafen til $f$.

## Oppgave 6 (3 poeng)

Løs differensiallikningen

$y'-xy=x$ , $y(0)=1$

## **Oppgave 7** (7 poeng)

Punktene $A(1, -4, 1)$ og $B(3, 0, 5)$ ligger i planet $\alpha$.

Vektoren $\vec{n}_\alpha = [k, 1, -k]$ står normalt på $\alpha$ for en bestemt verdi av konstanten $k$.

a) Vis at planet $\alpha$ er gitt ved $2x + y - 2z + 4 = 0$

Planet $\alpha$ skjærer $z$-aksen i punktet $C$.

b) Bestem koordinatene til $C$.

c) Bestem volumet av pyramiden *ABCO*, der $O$ er origo.

En kule har sentrum i origo og tangerer planet $\alpha$ i et punkt $P$.

d) Bestem koordinatene til punktet $P$.

## **Oppgave 8** (2 poeng)

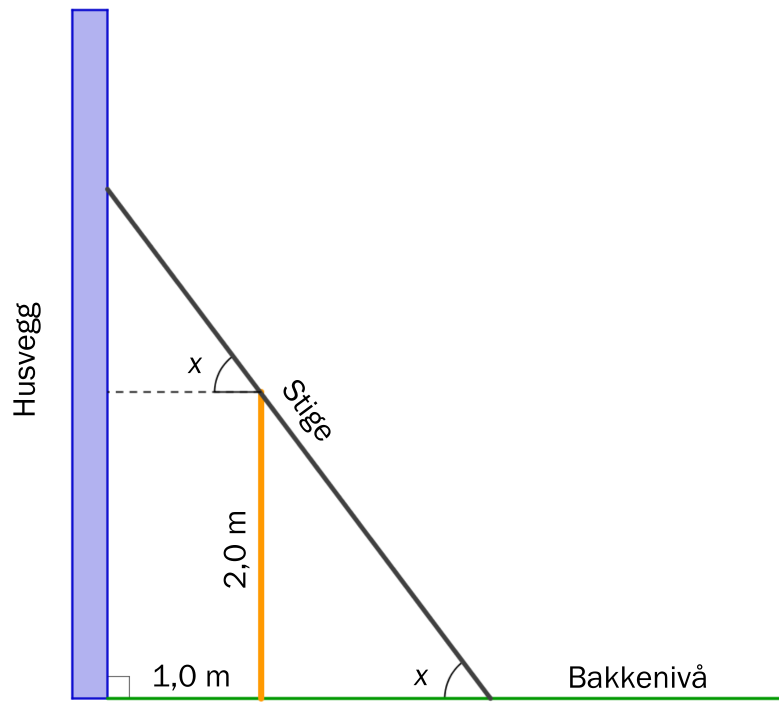
Bruk induksjon til å bevise påstanden $P$ gitt ved

$$P(n): \ \frac{k^n - 1}{k - 1} = 1 + k + k^2 + k^3 + \ldots + k^{n-1} \quad , \quad n \in \mathbb{N}$$

# DEL 2
## Med hjelpemidler

**Oppgave 1** (6 poeng)

En stige, som kan justeres, skal stå på skrå mot en husvegg og berøre et 2,0 m høyt gjerde. Gjerdet står 1,0 m fra husveggen. La $x$ være vinkelen mellom stigen og bakken. Se skissen nedenfor.




a) Vis at lengden av stigen, målt i meter, er

$$L(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{2}{\sin x} \quad , \quad \text{der} \quad 0° < x < 90°$$

b) Bestem $x$ slik at lengden av stigen blir kortest mulig.
Hvor høyt opp på veggen rekker stigen da?

## **Oppgave 2** (8 poeng)

Daglengden $D$ i Bergen er tilnærmet gitt ved funksjonen

$$D(t) = 6,63\sin(0,0172t - 1,39) + 12,5$$

Her er $D(t)$ daglengden målt i timer, og $t$ er antall dager fra nyttår.

a) Bruk uttrykket $D(t)$ til å bestemme den korteste og den lengste daglengden i Bergen.

b) Bruk graftegner til å tegne grafen til $D$ for $t \in [0,\ 365]$.

c) Når er daglengden i Bergen 14 timer?

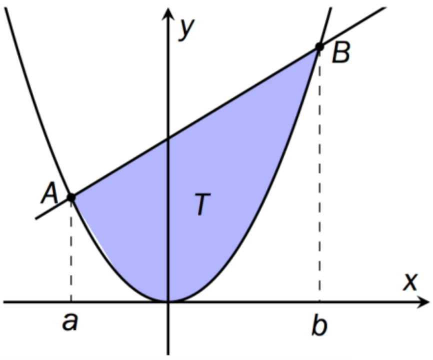
d) Undersøk på hvilken dato daglengden vokser raskest.
Hvor mye øker daglengden per døgn da?

## **Oppgave 3** (6 poeng)

Funksjonen $f$ er gitt ved

$$f(x) = x^2$$

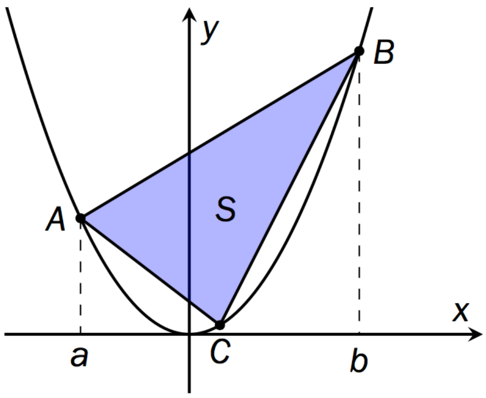
Punktene $A(a, a^2)$ og $B(b, b^2)$ der $a < b$, ligger på grafen til $f$. Se figur 1 nedenfor.




Figur 1

a) Grafen til $f$ og linjestykket $AB$ avgrenser et flatestykke med areal $T$.
Bruk CAS til å bestemme $T$ uttrykt ved $a$ og $b$.

Punktet $C$ på grafen har koordinatene $(c, c^2)$, der $c = \dfrac{a+b}{2}$. Se figur 2 nedenfor.




Figur 2

b) Bruk CAS til å vise at arealet $S$ av $\Delta ACB$ er $S = \dfrac{1}{8}(b-a)^3$.

c) Bestem forholdet $\dfrac{T}{S}$.

## **Oppgave 4** (4 poeng)

I en bygd med 1200 innbyggere spres et rykte. La $y$ være antall innbyggere som kjenner til ryktet ved tiden $t$, der $t$ er tiden målt i dager etter at ryktet oppsto.

Vi antar at ryktet spres med en fart som til enhver tid er proporsjonal med produktet av antall innbyggere som kjenner ryktet, og antall innbyggere som ikke kjenner det. Proporsjonalitetskonstanten har verdien $0{,}0006$.

Ved tiden $t = 0$ var det kun én person som kjente til ryktet.

a) Sett opp en differensiallikning som beskriver situasjonen ovenfor.

b) Hvor lang tid tar det før halve bygda kjenner til ryktet?

Blank side.

Blank side.

Schweigaards gate 15
Postboks 9359 Grønland
0135 OSLO
Telefon 23 30 12 00
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet