Eksamen S1 vår 2016 løsning

Del 1, ingen løsning

Oppgave 1

a)	b)
$x^2-3x+2=0$ $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}$ $\underline{\underline{x_1=1}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x_2=2}}$	$\lg(4x+3)=\lg 7$ $10^{\lg(4x+3)}=10^{\lg 7}$ $4x+3=7$ $4x=4$ $\underline{\underline{x=1}}$

Oppgave 2

a) $(2x-3)^2-3(x-2)^2+(x-1)(x+1)=(2x)^2-2\cdot2x\cdot3+3^2-3(x^2-2\cdot x\cdot2+2^2)+x^2-1$

$$=4x^2-12x+9-3x^2+12x-12+x^2-1=\underline{\underline{2x^2-4}}$$

b) $\frac{a^2b^3}{(a^3b)^{-2}}=\frac{a^2b^3}{a^{3\cdot(-2)}b^{-2}}=a^{2-(-6)}b^{3-(-2)}=\underline{\underline{a^8b^5}}$

Oppgave 3

a) Arealformelen gir $x\cdot y=6$ Omkretsformelen gir $2x+2y=11$

Ligningssettet blir $\begin{bmatrix} x\cdot y=6 \\ 2x+2y=11 \end{bmatrix}$

b) Omgjør den første ligninga til $y=\frac{6}{x}$ og setter inn i den andre

$$2x+2\cdot\frac{6}{x}=11$$

$$2x+\frac{12}{x}-11=0 \quad |\cdot x$$

$$2x^2-11x+12=0$$

$$x=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot2\cdot12}}{2\cdot2}=\frac{11\pm\sqrt{121-96}}{4}=\frac{11\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{11\pm5}{4}$$

Det gir de to mulighetene $x_1=\frac{3}{2}$ og $x_2=4$

Finner $y_1=\frac{6}{x_1}=\frac{6}{\frac{3}{2}}=6\cdot\frac{2}{3}=4$ og $y_2=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$, altså er de to parene egentlig samme løsning.

Svar: Rektanglet må ha lengde 4 og bredde $\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$

Oppgave 4

$-5x + x^2 \leq 0$ Finner først nullpunktene $x(-5 + x) = 0$ $x = 0 \quad \vee \quad -5 + x = 0$ $x = 0 \quad \vee \quad x = 5$	Undersøker fortegnet i hvert intervall: For $x < 0$ velger jeg $x = -1$ og får $-5 \cdot (-1) + (-1)^2 = 5 + 1 = 6 > 0$ For $0 < x < 5$ velger jeg $x = 1$ og får $-5 \cdot 1 + 1^2 = -5 + 1 = -4 < 0$ For $x > 5$ velger jeg $x = 6$ og får $-5 \cdot 6 + 6^2 = -30 + 36 = 6 > 0$

Jeg ville ha det negative intervallet, og ulikheten er oppfylt for $\underline{\underline{x \in [0\,,5]}}$.

Oppgave 5

a) 1 1 1 1 2 1 1 3 3 1 1 4 6 4 1 1 5 10 10 5 1 1 6 15 20 15 6 1 1 7 21 35 35 21 7 1 Leser av fra rad 7, tall 4 (teller med 0) at $\underline{\underline{\binom{7}{4} = 35}}$	b) $\binom{7}{4}$ representerer antall måter man kan trekke ut 4 elementer fra en gruppe på 7 uten tilbakelegging og uten at rekkefølgen er viktig. Et eksempel på en situasjon der dette kan brukes er å finne ut på hvor mange måter man kan trekke ut 4 elever som skal ta eksamen fra en klasse på 7.

Oppgave 6

a) Siden 0 ikke kan stå først er det bare 9 muligheter på første siffer, totalt $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \underline{\underline{9000}}$ koder.

b) Etter hvert som tallene blir «brukt opp» er det bare 9 muligheter på andre siffer, 8 på tredje og 7 på andre, totalt $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 81 \cdot 56 = \underline{\underline{4536}}$ pinkoder.

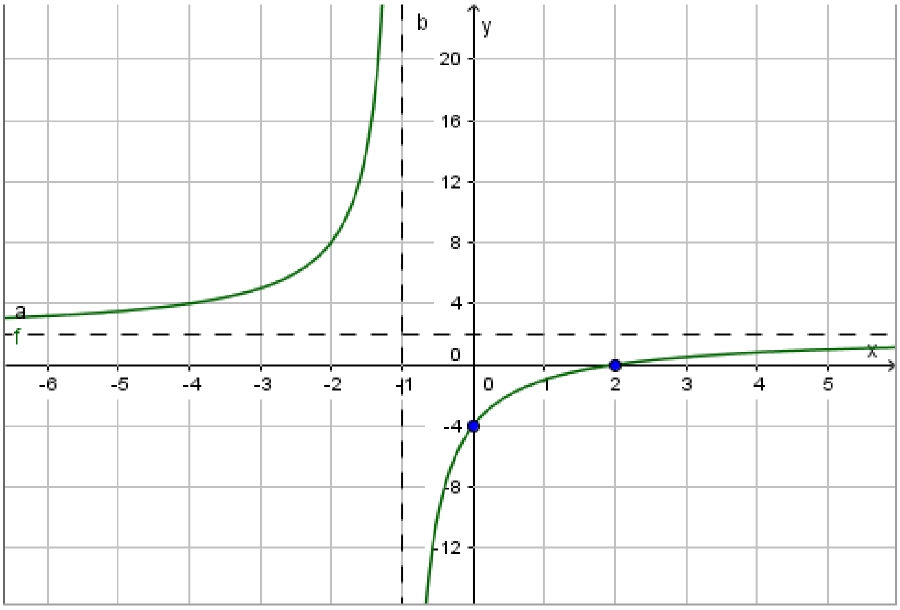
Oppgave 7

$$g(x) = \frac{ax + b}{x + c}$$

a) Vertikal asymptote når $x = -1$ betyr at nevneren er 0 for $x = -1$, da er $-1 + c = 0$ som gir at $c = 1$.
Skjærer y-aksen der $y = -4$, da er $x = 0$, som gir at $\frac{a \cdot 0 + b}{0 + 1} = -4$ som gir at $b = -4$
Nullpunktet der $x = 2$ betyr at telleren er null der, altså $a \cdot 2 - 4 = 0$, som gir at $a = 2$.

$$\underline{\underline{g(x) = \frac{2x - 4}{x + 1}}}$$

b) Finner den vertikale asymptoten ved å la x gå mot et høyt tall; $g(1000000) = \frac{2 \cdot 1000000 - 4}{10000000 + 1} \approx \frac{2000000}{1000000} = 2$, altså er den vertikale asymptoten $y = 2$.
Tegner asymptotene og skjæringspunktene med x- og y-aksen og skisserer grafen på neste side



Oppgave 8

$$K(x) = 0{,}1x^2 + 30x + 1000 \qquad , \quad 0 \leq x \leq 300$$

a) $K(0) = 0{,}1 \cdot 0^2 + 30 \cdot 0 + 1000 = 1000$ og
$K(100) = 0{,}1 \cdot 100^2 + 30 \cdot 100 + 1000 = 1000 + 3000 + 1000 = 5000$

$$\bar{a} = \frac{K(100) - K(0)}{100 - 0} = \frac{5000 - 1000}{100 - 0} = \frac{4000}{100} = \underline{\underline{40}}$$

Svar: Den gjennomsnittlige veksten til K i intervallet $[0\,,100]$ er 40. Det forteller oss at det i snitt har kostet 40kr å øke produksjonen med en enhet.

b) $K'(x) = 0{,}1 \cdot 2x + 30 \cdot 1 + 0 = 0{,}2x + 30$ gir at $K'(100) = 0{,}2 \cdot 100 + 30 = 20 + 30 = \underline{\underline{50}}$

Dette forteller at det vil koste ca. 50kr å øke produksjonen med én enhet fra 100 til 101 enheter.

c) Hvis bedriften selger varene for en fast pris er grenseinntekten fast $I'(x) = 60$, og det er størst overskudd når $I'(x)$ er lik grensekostnaden $K'(x)$

$$K'(x) = I'(x)$$
$$0{,}2x + 30 = 60$$
$$0{,}2x = 30 \quad | \cdot 5$$
$$\underline{\underline{x = 150}}$$

Svar: Det er størst overskudd når bedriften produserer 150 enheter per dag.

Oppgave 9

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \quad , \quad -1 < x < 5$$

a)

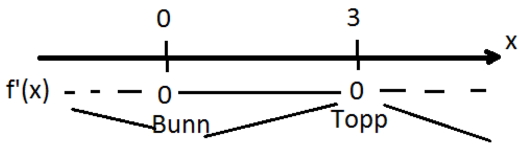
$$f(x) = 0$$
$$-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 = 0$$
$$x^2\left(-\frac{2}{3}x + 3\right) = 0$$
$$x^2 = 0 \quad \vee \quad -\frac{2}{3}x + 3 = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad -\frac{2}{3}x = -3$$
$$\underline{\underline{x = 0}} \quad \vee \quad \underline{\underline{x = \frac{9}{2}}}$$

Svar: nullpunktene er $\underline{\underline{(0,0)}}$ og $\underline{\underline{\left(\frac{9}{2}, 0\right)}}$

b) Finner først x-verdiene der den deriverte er 0, $f'(x) = -\frac{2}{3}\cdot 3x^2 + 3\cdot 2x = -2x^2 + 6x$

$$-2x^2 + 6x = 0$$
$$2x(-x + 3) = 0$$
$$2x = 0 \quad \vee \quad -x + 3 = 0$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$$

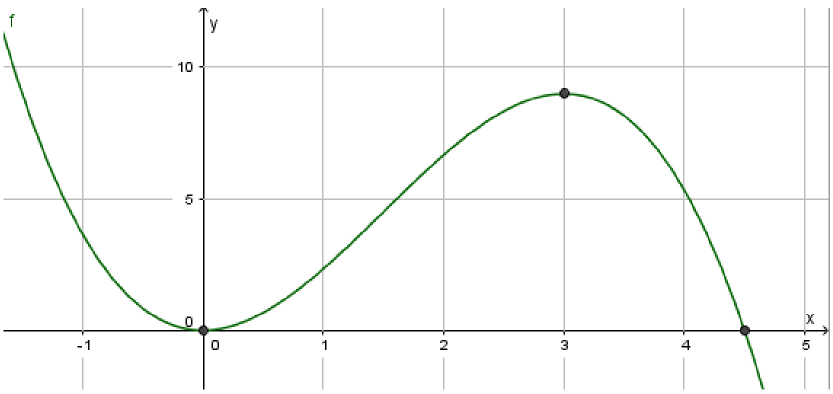
Regner en verdi i hvert intervall og tegner fortegnslinje for den deriverte:



Finner $f(0) = -\frac{2}{3}\cdot 0^3 + 3\cdot 0^2 = 0$ og $f(3) = -\frac{2}{3}\cdot 3^3 + 3\cdot 3^2 = -2\cdot 3^2 + 3\cdot 3^2 = 3^2 = 9$

Svar: <u>Det er et bunnpunkt i $(0,0)$ og et toppunkt i $(3,9)$</u>

c) Markerer nullpunktene og topp- og bunnpunktet og skisserer tredjegradsfunksjonen.



d) $x_0 = 1$

$y_0 = f(1) = -\frac{2}{3}\cdot 1^3 + 3\cdot 1^2 = -\frac{2}{3} + \frac{9}{3} = \frac{7}{3}$

$a = f'(1) = -2\cdot 1^2 + 6\cdot 1 = 4$

Ettpunktsformelen gir $y = a\cdot x + y_0 - a\cdot x_0 = 4x + \frac{7}{3} - 4\cdot 1 = 4x + \frac{7}{3} - \frac{12}{3} = \underline{\underline{4x - \frac{5}{3}}}$

Del 2, alle hjelpemidler

Oppgave 1

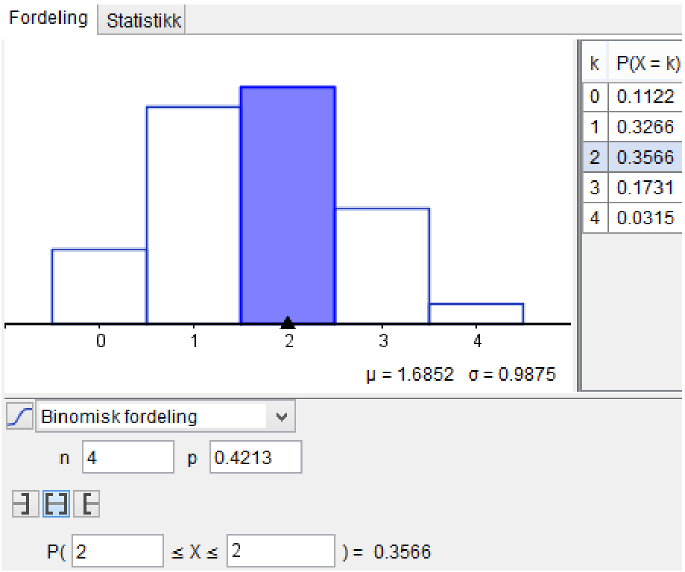
a) $p = P(minst\ 1) = 1 - P(ingen) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{126} \approx \underline{\underline{0,4213}}$

b) Sannsynligheten for at hver spiller får minst 1 sekser er $p = 0,4213$, her skal de første to få det og de andre to ikke, så

$$P(2\ første) = p \cdot p \cdot (1-p) \cdot (1-p) = 0,4213^2 \cdot 0,5787^2 \approx \underline{\underline{0,059}}$$

Svar: <u>Sannsynligheten for at bare de to første får minst en sekser er ca. 5,9%</u>

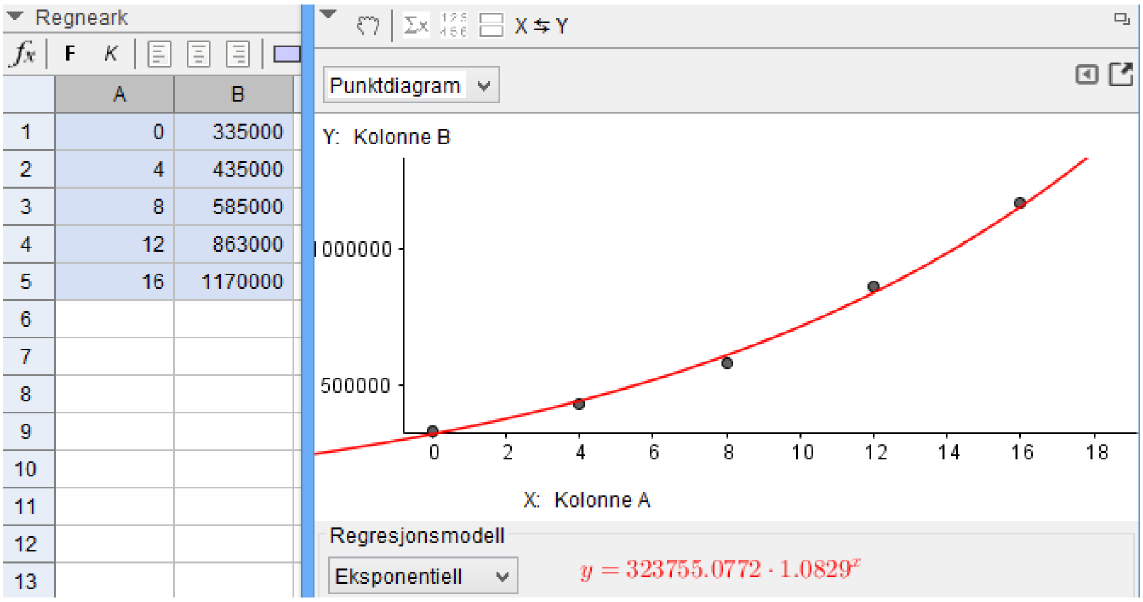
c) Dette er $n = 4$ uavhengig forsøk med to mulige utfall (minst en sekser eller ikke) og en fast sannsynlighet $p = 0,4213$, jeg bruker den binomiske sannsynlighetskalkulatoren i GeoGebra:



Svar: <u>Sannsynligheten for at to spillere får minst en sekser er ca. 35,7%</u>

Oppgave 2

a) Legger inn datapunktene i et regneark i GeoGebra og utfører en eksponentiell regresjon:



Vekstfaktoren er $k \approx 1,083$, regner om til prosent $p = 100k - 100 \approx 8,3\%$

Svar: <u>En eksponentiell modell som passer til tallene er $f(x) = 324 \cdot 10^3 \cdot 1,083^x$, og det tilsvarer en vekst på ca. 8,3% per år.</u>

b) Definerer funksjonen og finner når den blir lik 2000000.

1 f(x):=324000*1.083^x

→ $f(x) := 324000 \left(\frac{1083}{1000}\right)^x$

2 Løs[f(x)=2000000]

≈ $\{x = 22.83\}$

Svar: <u>Produksjonen vil passere 2 000 000 t i år 2020</u>

c) Endring er lik den deriverte, finner når den deriverte er 100 000

3 Løs[f'(x)=100000]

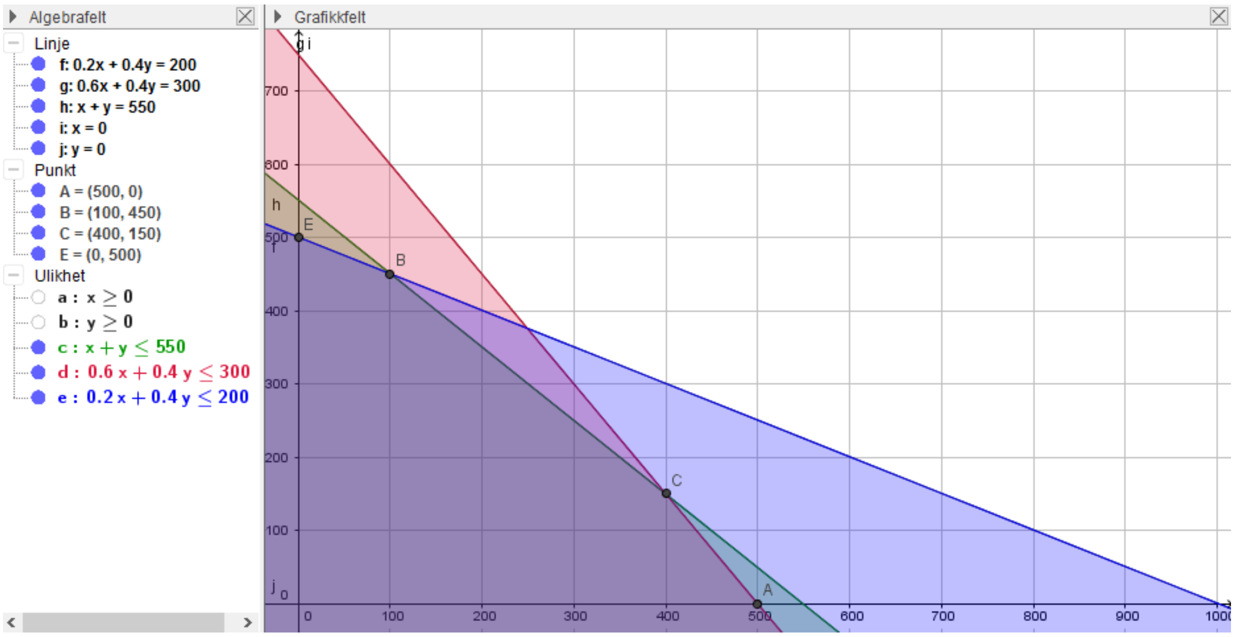
≈ $\{x = 16.97\}$

Svar: <u>Produksjonsveksten er over 100 000 t per år for første gang i 2014.</u>

Oppgave 3

a) Den solgte mengden kan ikke være negativ, derfor må $x \geq 0$ og $y \geq 0$.
Den totale mengden solgt er maksimalt 550, derfor er $x + y \leq 0$.
De bruker $0{,}6x$ kilo torsk til type A og $0{,}4y$ kilo torsk til B og har 300kg torsk, det gir $0{,}6x + 0{,}4y \leq 300$
De bruker $0{,}2x$ kilo sei til type A og $0{,}4y$ kilo sei til B og har 200kg sei, det gir $0{,}2x + 0{,}4y \leq 200$
Alle ulikhetene er som vist i oppgaven.

b) Tegner opp ulikhetene i GeoGebra. Tegner ikke $x \geq 0$ og $y \geq 0$ fordi det blir rotete.
Tegner også ligningene slik at jeg kan finne skjæringspunktene mellom dem.



c) For hver type tar jeg kiloprisen og trekker fra råvareprisen for å finne fortjenesten per kilogram
Type A: $70 - 0{,}6 \cdot 55 - 0{,}2 \cdot 35 = 70 - 33 - 7 = 30$ kr/kg, ved salg på x kg blir fortjenesten $30x$.
Type B: $61 - 0{,}4 \cdot 55 - 0{,}4 \cdot 35 = 61 - 22 - 14 = 25$ kr/kg, ved salg på y kg blir fortjenesten $25y$.
Trekker fra de faste kostnadene og får at $\underline{\underline{I(x, y) = 30x + 25y - 5000}}$

d) Fortjenesten er størst i et av hjørnene.
Definerer inntektsfunksjonen med $I(x,y) \coloneqq 30x + 25y - 5000$ og finner fortjenesten i alle hjørnene:

2	I(500,0) → **10000**	3	I(100,450) → **9250**	4	I(400,150) → **10750**	5	I(0,500) → **7500**

Svar: Den største fortjenesten butikken kan få er 10 750 kroner.

Oppgave 4

$$P(x) = 0{,}5x^2 - 10x + 60 \quad , \quad 0 \le x \le 8$$

a) $P(x)$ er i kr/kg, men x er i tonn (1000kg), så prisen per tonn er $1000 \cdot P(x)$.
Inntekten per tonn er x multiplisert med prisen per tonn. Dermed er:

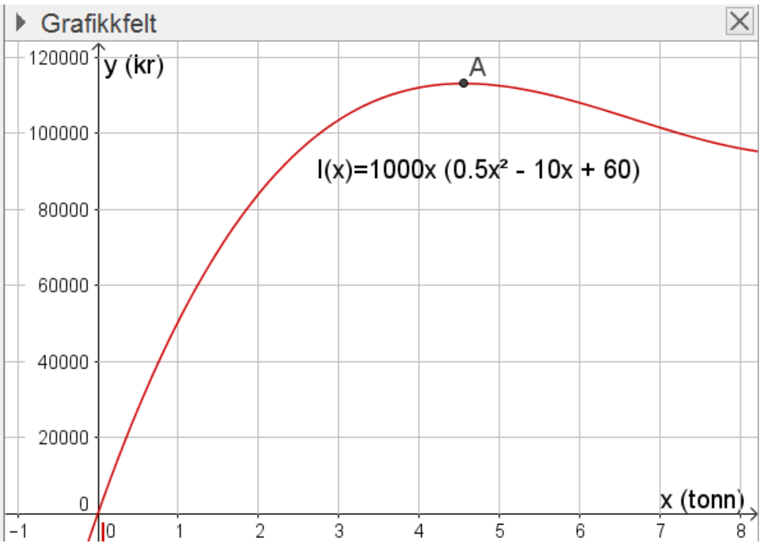
$$\underline{I(x) = 1000 \cdot x \cdot P(x)}$$

b) Tegner grafen og bruker $Ekstremalpunkt[I(x)]$ for å finne toppunktet A.

Algebrafelt
Funksjon
- $I(x) = 1000\,x\,(0.5\,x^2 - 10\,x + 60)$
- $P(x) = 0.5\,x^2 - 10\,x + 60$

Punkt
- A = (4.56, 113073.42)
- B = (8.77, 94333.99)

Tekst
- tekst1 = "I(x)=1000x (0.5x² - 10x + 60)"

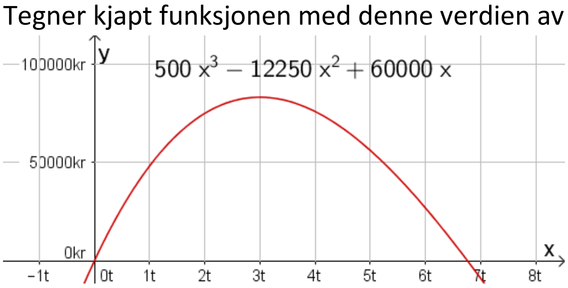


Svar: Den maksimale inntekten er ca. 113 tusen kroner ved en fangst på ca. 4,56 tonn fisk.

c) $F(x) = 0{,}5x^2 - ax + 60 \quad , \quad 0 \le x \le 8 \quad og \quad a > 0$
På samme måte som over blir inntekten her $I_2 = 1000 \cdot x \cdot F(x)$
Hvis det er et toppunkt i $x = 3$ er den deriverte lik 0 der, så jeg finner verdien av a når det skjer:

1	I2(x):=1000x*(0.5x^2-a*x+60) → $I2(x) \coloneqq 1000\,x\left(\frac{1}{2}\,x^2 - a\,x + 60\right)$	2	Løs[I2'(3)=0, a] → $\left\{a = \frac{49}{4}\right\}$

Tegner kjapt funksjonen med denne verdien av a for å sjekke at det er et toppunkt:



Svar: For at inntekten skal være størst når det selges 3t så må $\underline{\underline{a = \frac{49}{4}}}$