Løsningsforslag til eksamen i Matematikk R1 V2016

Del 1

Oppgave 1

a) $f'(x) = -3 \cdot 2x + 6 = \underline{\underline{-6x + 6}}$.

b) Vi bruker kjerneregelen med $x^3 - x$ som kjerne:

$$g'(x) = 5 \cdot \frac{1}{x^3 - x} \cdot (x^3 - x)' = \frac{5(3x^2 - 1)}{x^3 - x} = \underline{\underline{\frac{15x^2 - 5}{x^3 - x}}}.$$

c) Vi bruker brøkregelen:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(x-1)' \cdot (x+1) - (x-1) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} \\ &= \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{2}{(x+1)^2}}}. \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) P er delelig med $(x - 2)$ hvis og bare hvis $P(2) = 0$:

$$\begin{aligned} (2)^3 - 7(2)^2 + 14(2) + k &= 0 \\ k &= -8 + 28 - 28 = \underline{\underline{-8}} \end{aligned}$$

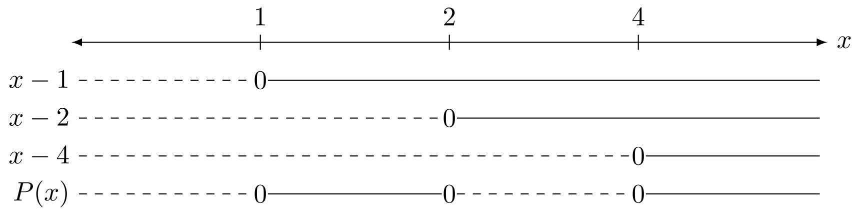
b) Vi utfører først polynomdivisjonen $P(x) : (x - 2)$.

$$\begin{array}{l} (x^3 - 7x^2 + 14x - 8) : (x-2) = x^2 - 5x + 4. \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ \quad -5x^2 + 14x - 8 \\ \quad \underline{-5x^2 + 10x} \\ \qquad\qquad 4x - 8 \\ \qquad\qquad \underline{4x - 8} \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

$x^2 - 5x + 4$ kan vi faktorisere som $(x - 1)(x - 4)$ siden $-1 - 4 = -5$ og $(-1)(-4) = 4$. Dermed har vi at

$$P(x) = \underline{\underline{(x-1)(x-2)(x-4)}}.$$

c) Vi tegner en fortegnslinje for $P(x)$:



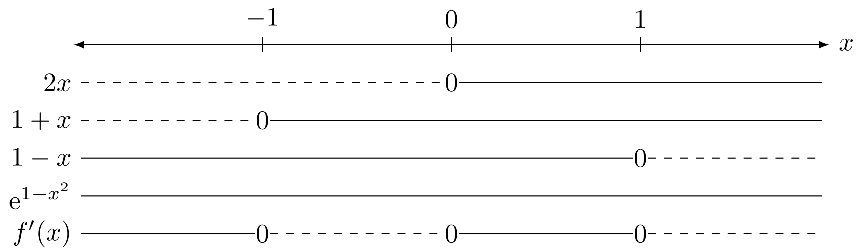
Vi kan nå lese av at $P(x) \leq 0$ når $\underline{\underline{x \leq 1 \text{ eller } 2 \leq x \leq 4}}$.

Oppgave 3

a) Her må vi bruke både produkt- og kjerneregelen:

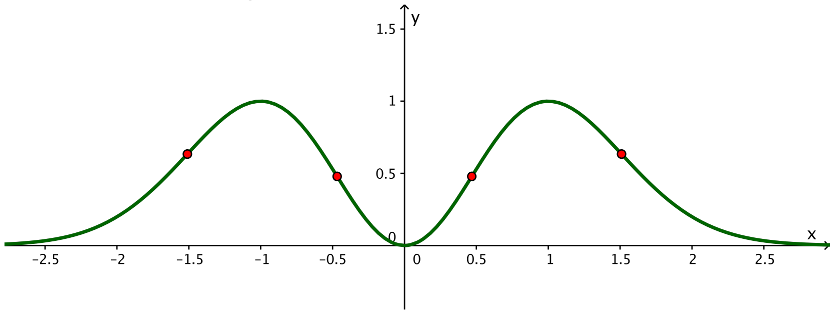
$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)' \cdot e^{1-x^2} + x^2 \cdot \left(e^{1-x^2}\right)' \\ &= 2xe^{1-x^2} + x^2e^{1-x^2} \cdot (1-x^2)' \\ &= 2xe^{1-x^2} - 2x^3e^{1-x^2} \\ &= \underline{\underline{2x(1-x^2)e^{1-x^2}}}. \end{aligned}$$

b) Den deriverte kan faktoriseres videre til $f'(x) = 2x(1+x)(1-x)e^{1-x^2}$. Da får vi følgende fortegnslinje:



Vi får toppunktene $(-1, f(-1)) = \underline{\underline{(-1, 1)}}$ og $(1, f(1)) = \underline{\underline{(1, 1)}}$, og bunnpunktet $(0, f(0)) = \underline{\underline{(0, 0)}}$.

c/d) Vi ser fra skissen at grafen har fire vendepunkter.



Oppgave 4

a) CH er katet i en rettvinklet trekant med sider på 6 og 3, så $CH = \sqrt{6^2 - 3^2} = \underline{\underline{\sqrt{27}}}$. CE er hypotenus i en rettvinklet trekant med sider på 6 og 6, så $CE = \sqrt{6^2 + 6^2} = \underline{\underline{6\sqrt{2}}}$. CF vil være like lang siden CE og CF er radier i samme sirkel. Dermed kan vi bruke Pytagorassetningen på ΔCHF:

$$\begin{aligned} HF^2 &= CF^2 - CH^2 \\ HF^2 &= (6\sqrt{2})^2 - (\sqrt{27})^2 \\ HF &= \sqrt{72 - 27} = \underline{\underline{3\sqrt{5}}}. \end{aligned}$$

b) $AF = AH + HF = 3 + 3\sqrt{5}$. Dermed blir

$$\frac{AF}{AB} = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{6} = \underline{\underline{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}}.$$

Oppgave 5

a) Punktene ligger på en rett linje hvis $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$ er parallelle, altså hvis det finnes et tall k slik at $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= [5 - 1, 2 - 1] = [4, 1] \\ \overrightarrow{AC} &= [3 - 1, 5 - 1] = [2, 4] \end{aligned}$$

Vi ser fra x-koordinatene at $k = 2$, men dette passer ikke med y-koordinatene. Dermed er vektorene ikke parallelle, og $\underline{\underline{\text{punktene ligger ikke på en rett linje}}}$.

b) $\angle CDA = 90°$ dersom $\overrightarrow{DC}$ og $\overrightarrow{DA}$ står vinkelrett på hverandre, noe de gjør hvis skalarproduktet mellom de er null.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} &= [3 - 0, 5 - t] = [3, 5 - t] \\ \overrightarrow{DA} &= [0 - 1, t - 1] = [-1, t - 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DA} &= 0 \\ 3(-1) + (5 - t)(t - 1) &= 0 \\ -3 + 5t - 5 - t^2 + t &= 0 \\ t^2 - 6t + 8 &= 0 \\ (t - 2)(t - 4) &= 0 \\ \underline{\underline{t = 2}} \qquad \vee \qquad & \underline{\underline{t = 4}} \end{aligned}$$

c) Vi har to muligheter for at $ABCD$ skal være et trapes.

Den første muligheten er at $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$ er parallelle. I så fall har vi at

$$[4, 1] = k \cdot [3, 5 - t] \Rightarrow k = \frac{4}{3} \Rightarrow t = \underline{\underline{\frac{17}{4}}}.$$

Den andre muligheten er at $\overrightarrow{DA}$ og $\overrightarrow{BC} = [3-5, 5-2] = [-2, 3]$ er parallelle. I så fall vil

$$[-1, t-1] = k[-2, 3] \Rightarrow k = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{t = \frac{5}{2}}}.$$

Oppgave 6

a) Hun kan velge de to realfagene på $\binom{5}{2}$ måter og de to andre fagene på $\binom{8}{2}$ måter, så antall kombinasjoner blir

$$\binom{5}{2} \cdot \binom{8}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 10 \cdot 28 = \underline{\underline{280}}.$$

b) Antallet måter å velge fag på er $\binom{13}{4} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 715$.

Antall måter å velge ingen realfag: $\binom{8}{4} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$

Antall måter å velge ett realfag: $\binom{5}{1} \cdot \binom{8}{3} = \dfrac{5}{1} \cdot \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 280$

Antall måter å velge minst to realfag: $715 - 70 - 280 = \underline{\underline{365}}$.

Oppgave 7

a) Se vedlegg 1. Leser av at nullpunktene er $\underline{\underline{x = -2}}$ og $\underline{\underline{x = 4}}$.

b) S ligger midt mellom A og B så koordinatene blir

$$\left(\frac{0 + (-p)}{2}, \frac{1+q}{2}\right) = \underline{\underline{\left(-\frac{p}{2}, \frac{q+1}{2}\right)}}.$$

Radius er avstanden fra dette punktet til A, som blir

$$\sqrt{(-\frac{p}{2} - 0)^2 + (\frac{q+1}{2} - 1)^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + \frac{(q+1-2)^2}{4}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{p^2 + (q-1)^2}{4}}}}.$$

c) Sirkellikningen blir som følger:

$$\left(x - \left(-\frac{p}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \frac{q+1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{p^2 + (q-1)^2}{4}}\right)^2$$

$$x^2 + 2x \cdot \frac{p}{2} + \frac{p^2}{4} + y^2 - 2y \cdot \frac{q+1}{2} + \frac{(q+1)^2}{4} = \frac{p^2 + (q-1)^2}{4}$$

$$x^2 + px + y^2 - (q+1)y - \frac{(q-1)^2 - (q+1)^2}{4} = 0$$

$$x^2 + px + y^2 - (q+1)y + q = 0$$

Denne sirkelen skjærer x-aksen når $y = 0$, altså når $x^2 + px + q = 0$. QED.

Del 2

Oppgave 1

a) Siden er to bunker vil $P(F) = P(\overline{F}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$.

I bunke A er 5 av 8 kort røde, så $P(R|F) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \underline{\underline{\frac{5}{14}}}$.

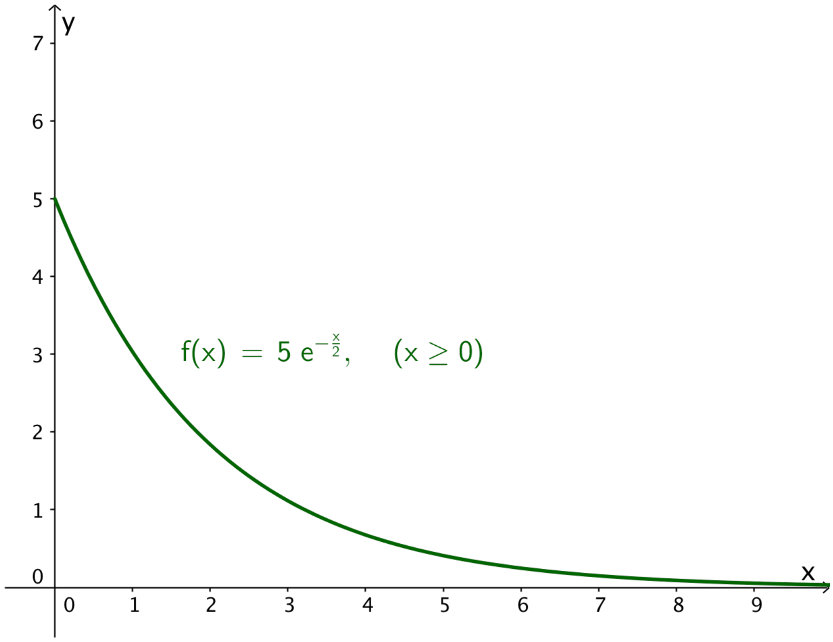
I bunke B er 3 av 7 kort røde, så $P(R|\overline{F}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{7}}}$.

b) $P(R) = P(F) \cdot P(R|F) + P(\overline{F}) \cdot P(R|\overline{F}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$.

c) $P(F|R) = \frac{P(F) \cdot P(R|F)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{14}}{\frac{1}{4}} = \underline{\underline{\frac{5}{7}}}$.

Oppgave 2

a) Tegner grafen i Geogebra:



b) Bredden til rektangelet er gitt ved OA som har lengden x, og høyden til rektangelet er gitt ved OC som har lengden $f(x)$. Dermed blir arealet

$$T(x) = x \cdot f(x) = \underline{\underline{5x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}}.$$

c) Vi tegner grafen til T i Geogebra og finner toppunktet $(2, 3{,}68)$ ved hjelp av kommandoen Ekstremalpunkt. Rektangelet har altså sitt største areal når $\underline{\underline{x = 2 \text{ og arealet er } 3{,}68}}$.

Oppgave 3

a) $\overrightarrow{BC} = [5-4, 5-0] = [1,5]$ er en retningsvektor for linja. Da vil en parameterframstilling være

$$\begin{cases} x = 4+t \\ y = 5t \end{cases}$$

b) Punktet P vil ha koordinater gitt ved parameterframstillinga i a-oppgaven, slik at

$$\overrightarrow{AP} = [(4+t)-1, 5t-3] = \underline{\underline{[3+t, -3+5t]}}.$$

c) $\overrightarrow{AB} = [4-1, 0-3] = [3,-3]$. Skalarproduktet mellom ortogonale vektorer er alltid null, dermed har vi at

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} &= 0 \\ 3(3+t) + (-3)(-3+5t) &= 0 \\ 9 + 3t + 9 - 15t &= 0 \\ 12t &= 18 \\ t &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Da blir $P = \left(4 + \frac{3}{2}, 5 \cdot \frac{3}{2}\right) = \underline{\underline{\left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right)}}$.

d) Løst i CAS i Geogebra. Vi får to løsninger.

1	AB := Vektor[(3,-3)] → AB := $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$
2	AP := Vektor[(3+t,-3+5t)] → AP := $\begin{pmatrix} 3+t \\ -3+5t \end{pmatrix}$
3	Skalarprodukt[AB, AP] = Lengde[AB] Lengde[AP] cos(45°) NLøs: $\{t = -3, t = 0.6\}$
4	P1 := (4 - 3, 5 * -3) → P1 := $(1, -15)$
5	P2 := (4 + 0.6, 5 * 0.6) → P2 := $\left(\frac{23}{5}, 3\right)$

Oppgave 4

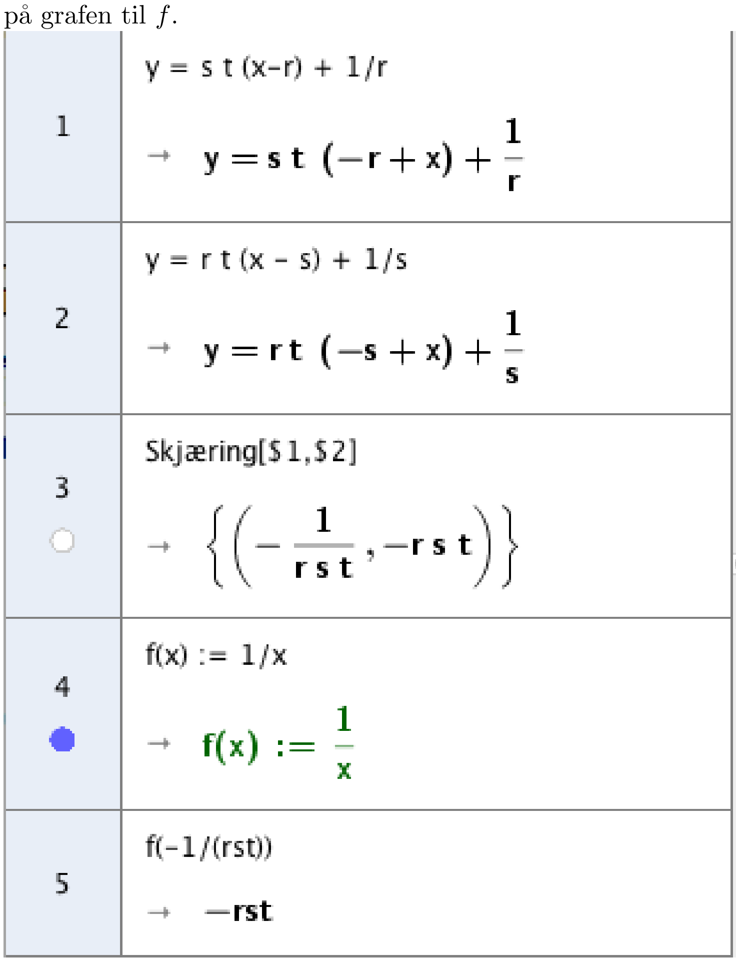
a) Stigningstallet til linja gjennom B og C vil være

$$\frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{s}}{t-s}=\frac{s-t}{(t-s)st}=-\frac{1}{st}.$$

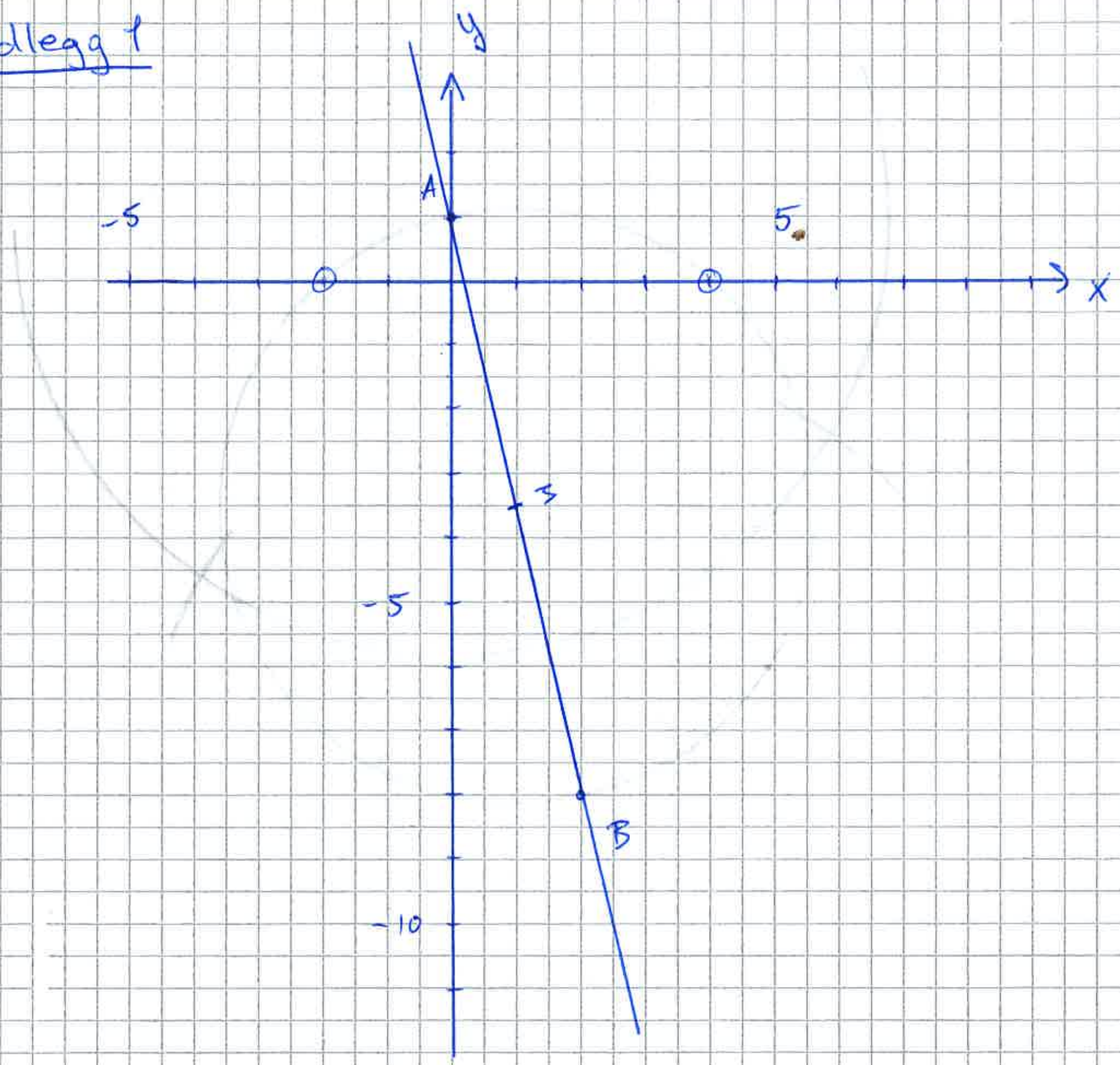
Da blir stigningstallet til linja som står normalt på denne st (hvis en linje har stigningstall a vil linja med stigningstall $-\frac{1}{a}$ stå normalt på denne). Vi bruker ettpunktsformelen på linja med dette stigningstallet som går gjennom A og får

$$y-\frac{1}{r}=st(x-r)\Leftrightarrow \underline{\underline{y=st(x-r)+\frac{1}{r}}}.$$

b) Løst i CAS. Linje 5 viser at skjæringspunktet mellom linjene er et punkt på grafen til f.



Vedlegg 1



Konstruksjonsforklaring:

1. Tegner inn A og B og slår en linje gjennom de
2. Konstruerer midtpunktet på AB
3. Slår en sirkel med sentrum i midtpunktet gjennom A.